Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2012/2013

LOGIQUE, IN7M12

Corrigé de l'examen du 14/12/2012

Sujet de M. Sénizergues.
La note obtenue sur cette partie est le minimum entre 10 et le total obtenu sur les exercices 1,2,3.

Exercice 1

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$A, B \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$A, B \vdash B$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$A, B \vdash A \wedge B$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_d$}
\UnaryInfC{$A, B \vdash A \wedge B, A \wedge C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$A, C \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$A, C \vdash C$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$A, C \vdash A \wedge C$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_d$}
\UnaryInfC{$A, C \vdash A \wedge B, A \wedge C$}
\RightLabel{$\vee_g$}
\BinaryInfC{$A, B \vee C \vdash A \wedge B, A \wedge C$}
\RightLabel{$\wedge_g$}
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C) \vdash A \wedge B, A \wedge C$}
\RightLabel{$\vee_d$}
\UnaryInfC{$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$A \vdash A, Q(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$Q(x) \vdash A, Q(x)$}
\RightLabel{$\vee_g$}
\BinaryInfC{$A \vee Q(x) \vdash A, Q(x)$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$A \vee Q(x), \neg A \vdash Q(x)$}
\RightLabel{$\exists_d$}
\UnaryInfC{$A \vee Q(x), \neg A \vdash \exists x Q(x)$}
\RightLabel{$\exists_g$}
\UnaryInfC{$\exists x(A \vee Q(x)), \neg A \vdash \exists x Q(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow_d$}
\UnaryInfC{$\exists x(A \vee Q(x)) \vdash (\neg A) \rightarrow \exists x Q(x)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$A \vdash A, P(x)$}
\RightLabel{$\vee_d$}
\UnaryInfC{$A \vdash A \vee P(x)$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$\vdash A \vee P(x), \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$P(x) \vdash A, P(x)$}
\RightLabel{$\vee_d$}
\UnaryInfC{$P(x) \vdash A \vee P(x)$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$\vdash A \vee P(x), \neg P(x)$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$\vdash A \vee P(x), (\neg A) \wedge (\neg P(x))$}
\RightLabel{$\exists_d$}
\UnaryInfC{$\vdash A \vee P(x), \exists x((\neg A) \wedge (\neg P(x)))$}
\RightLabel{$\forall_d$}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x(A \vee P(x)), \exists x((\neg A) \wedge (\neg P(x)))$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg \forall x(A \vee P(x)) \vdash \exists x((\neg A) \wedge (\neg P(x)))$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 2

S_1 admet la preuve suivante (dans LJ) :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$\vee_d^1$}
\UnaryInfC{$A \vdash A \vee B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$C \vdash C$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_g$}
\UnaryInfC{$C, A \vdash C$}
\RightLabel{$\rightarrow_g$}
\BinaryInfC{$(A \vee B) \rightarrow C, A \vdash C$}
\RightLabel{$\rightarrow_d$}
\UnaryInfC{$(A \vee B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\RightLabel{$\vee_d^2$}
\UnaryInfC{$B \vdash A \vee B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$C \vdash C$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_g$}
\UnaryInfC{$B, C \vdash C$}
\RightLabel{$\rightarrow_g$}
\BinaryInfC{$(A \vee B) \rightarrow C, B \vdash C$}
\RightLabel{$\rightarrow_d$}
\UnaryInfC{$(A \vee B) \rightarrow C \vdash B \rightarrow C$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$(A \vee B) \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$}
\end{prooftree}
$$

Le séquent S_2 est réfuté par la structure de Kripke suivante :

$$\mathcal{K} := \langle K, \leq, \Vdash \rangle$$

où $K = \{0, 1, 2\}, \leq\ = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (0, 2)\}, \Vdash_0 = \{(1, A), (2, B)\}$ (voir la figure 1).
En effet, les noeuds $0, 1, 2$ vérifient :

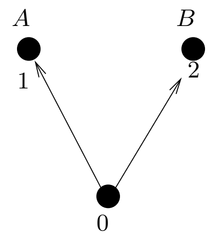

Figure 1 – $\mathcal{K}$.

$$0 \nVdash A, 1 \nVdash B, 2 \nVdash A$$

donc

$$0 \nVdash A \wedge B, 1 \nVdash A \wedge B, 2 \nVdash A \wedge B \tag{1}$$

Comme l'ensemble des noeuds majorant 0 est $\{0, 1, 2\}$, il résulte de (1) que

$$\forall k' \in K, k' \geq 0 \Rightarrow k' \nVdash A \wedge B$$

ce qui est équivalent à

$$0 \Vdash \neg(A \wedge B) \tag{2}$$

D'autre part, comme $0 \leq 1$ (pour l'ordre sur K) et $1 \Vdash A$

$$0 \nVdash \neg A \tag{3}$$

et comme $0 \leq 2$ (pour l'ordre sur K) et $2 \Vdash B$

$$0 \nVdash \neg B. \tag{4}$$

De (3)(4), on conclut que

$$0 \nVdash (\neg A) \vee (\neg B). \tag{5}$$

Les relations (2) et (5) montrent que le séquent

$$\neg(A \wedge B) \vdash (\neg A) \vee (\neg B)$$

n'est pas valide dans $\mathcal{K}$. Ce séquent S_2 n'est donc pas prouvable dans LJ.
S_3 admet la preuve suivante (dans LJ) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\,\texttt{ax}}{A,B\vdash A}\,\texttt{aff}_g}{A\wedge B\vdash A}\,\wedge_g}{A\wedge B,\neg A\vdash}\,\neg_g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B\vdash B}\,\texttt{ax}}{A,B\vdash B}\,\texttt{aff}_g}{A\wedge B\vdash B}\,\wedge_g}{A\wedge B,\neg B\vdash}\,\neg_g}{A\wedge B,(\neg A)\vee(\neg B)\vdash}\,\vee_g}{(\neg A)\vee(\neg B)\vdash\neg(A\wedge B)}\,\neg_d}{(\neg A)\vee(\neg B),\neg\neg(A\wedge B)\vdash}\,\neg_g}{\neg\neg(A\wedge B)\vdash\neg((\neg A)\vee(\neg B))}\,\neg_d$$

Exercice 3

1- Voici une preuve dans FLK du séquent $\neg\neg A\vdash A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\,\texttt{ax}}{\vdash A,\neg A}\,\neg_d}{\neg\neg A\vdash A}\,\neg_g$$

2- Montrons que la règle de l'énoncé est une règle dérivée du système FLK :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash B_1,B_2,\ldots,B_n}{\Gamma,\neg B_1\vdash B_2,\ldots,B_n}\,\neg_g}{\Gamma,\neg B_1,\neg B_2\vdash\ldots,B_n}\,\neg_g}{\vdots}\,\neg_g}{\Gamma,\neg B_1,\neg B_2,\ldots,\neg B_n\vdash}\,\neg_g}{\Gamma,\neg B_1,\neg B_2,\ldots,\neg B_n\vdash\bot}\,\texttt{aff}_d$$

3- Montrons que la règle de l'énoncé est une règle dérivée du système FLK. Pour tout $i\in[1,n]$, notons π_i une preuve dans FLK de $\neg\neg B_i\vdash B_i$ (on a vu à la question 1 qu'une telle preuve existe).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\neg\Delta\vdash\bot \quad \dfrac{}{\bot\vdash}\,\texttt{ax}}{\Gamma,\neg\Delta\vdash}\,\texttt{coupure}}{\Gamma\vdash\neg\neg B_1,\neg\neg B_2,\ldots,\neg\neg B_n}\,\neg_d^n \qquad \begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\\ \neg\neg B_1\vdash B_1\end{matrix}}{\Gamma\vdash B_1,\neg\neg B_2,\ldots,\neg\neg B_n}\,\texttt{coupure} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\\ \neg\neg B_2\vdash B_2\end{matrix}}{\begin{matrix}\Gamma\vdash B_1,B_2,\ldots,\neg\neg B_n\\ \vdots\\ \Gamma\vdash B_1,\ldots,B_{n-1},\neg\neg B_n\end{matrix}}\,\texttt{coupure} \qquad \begin{matrix}\pi_n\\ \vdots\\ \neg\neg B_n\vdash B_n\end{matrix}}{\Gamma\vdash B_1,B_2,\ldots,B_n}\,\texttt{coupure}$$

4- Le schéma de règle $\rightarrow_g$ de LK n'est pas un schéma de règle de FLK. Voici une simulation de ce schéma dans le système FLK :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg\Delta \vdash A}\,\neg_g^* \quad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\Delta, B \vdash \bot}\,\texttt{Q2}}{\Gamma, \neg\Delta, A \rightarrow B \vdash \bot}\,\texttt{impg-f}}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\,\texttt{Q3}$$

Donc, toute preuve dans le système LK est simulable par une preuve dans FLK.
Inversement, toute règle de FLK est une règle de LK, donc toute preuve dans FLK est aussi une preuve dans LK.
Par conséquent, les jugements prouvables dans LK et FLK sont exactement les mêmes.