



FIG. 1 – \mathcal{K}_1 .

$\forall k' \geq 0$, si $k' \Vdash A$ alors $k' \Vdash B$

donc

$$0 \Vdash A \rightarrow B. \quad (1)$$

D'autre part, comme $0 \leq 1$ (pour l'ordre sur les noeuds de \mathcal{K}_1), et $1 \Vdash A$

$$0 \not\Vdash \neg A$$

et comme, par définition de la relation de forçage \Vdash_0 , $0 \not\Vdash B$, on a

$$0 \not\Vdash \neg A \vee B \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) montrent que le séquent

$$A \rightarrow B \vdash (\neg A) \vee B$$

n'est pas valide dans \mathcal{K}_1 . Ce séquent n'est donc pas prouvable dans LJ.

S_2 admet la preuve suivante (dans LJ) :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\text{ax}}}{\neg A, A \vdash}^{\neg_g}}{\neg A, A \vdash B}^{\text{aff}_d} \quad \frac{\overline{B, A \vdash B}^{\text{ax}'}}{\neg A \vee B, A \vdash B}^{\vee_g}}{\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B}^{\rightarrow_d}$$

Exercice 6

1-

$$S(u, w) = (a, a)(b, b)(b, a)(\#, b); \quad S(v, w) = (b, a)(a, b)(a, a)(b, b)(a, \#).$$

2- Les trois langages $L_=, L_{\approx}, L_{\preceq}$ sont décrits par les expressions rationnelles suivantes :

$$L_= = \{(x, x) \mid x \in X\}^*; \quad L_{\approx} = \{(x, y) \mid x \in X, y \in X\}^*; \quad L_{\preceq} = \{(x, x) \mid x \in X\}^* \cdot \{(\#, x) \mid x \in X\}^*.$$

3- Soit $x \in X$. Le langage L_x est décrit par l'expression rationnelle :

$$L_x = L_= \cdot \{(\#, x)\}.$$

4- On procède comme pour la preuve du théorème de Büchi-Bruyère, vue en cours.

Remarquons que toute formule du premier ordre (sur le langage de l'énoncé) peut être transformée en une formule équivalente Φ , dont toutes les sous-formules atomiques sont de l'une des quatre formes :

$$u \approx v, \quad u = v, \quad u \preceq v, \quad u \cdot x = v$$

(où $x \in X$ et u, v sont des variables). Soit Φ une telle formule et soient $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ un ensemble de variables qui contient toutes les variables de Φ . Notons

$$L(\Phi, z_1, \dots, z_n) := \{S(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_1, u_2, \dots, u_n \in X^*, \mathcal{M} \models \Phi(u_1, u_2, \dots, u_n)\}$$

On démontre par récurrence sur $|\Phi| + n$ que $L(\Phi, z_1, \dots, z_n)$ est rationnel.

Base : Φ est atomique et $n \leq 2$.

Si $n = 2$: d'après la question 2, $L(\Phi, z_1, z_2)$ est rationnel.

Si $n = 1$: alors $z_1 = z_2$. Dans ce cas, $L(\Phi, z_1) = X^*$ ou $L(\Phi, z_1) = \emptyset$, donc $L(\Phi, z_1)$ est rationnel.

Cas 1(ajout d'une variable) : z_1 n'apparaît pas dans Φ .

Par hypothèse de récurrence, $L(\Phi, z_2, \dots, z_n)$ est rationnel. Soit $\pi_{2,n} : ((X \cup \{\#\})^n)^* \rightarrow ((X \cup \{\#\})^{n-1})^*$ l'homomorphisme défini par

$$\pi_{2,n}(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2, \dots, a_n).$$

Soit $SUP_n \subseteq ((X \cup \{\#\})^n)^*$ l'ensemble des superpositions de n mots de X .

$$SUP_n = \{u \in ((X \cup \{\#\})^n)^* \mid \forall i \in [1, n], \pi_i(u) \in X^* \cdot \{\#\}^* \text{ et } \exists i \in [1, n], \pi_i(u) \in X^*\},$$

où $\pi_i : ((X \cup \{\#\})^n)^* \rightarrow (X \cup \{\#\})^*$ est la projection sur la i -ième composante. Comme l'ensemble des langages rationnels est clos par homomorphisme inverse et par opérations booléennes, SUP_n est rationnel.

Or

$$L(\Phi, z_1, z_2, \dots, z_n) = \pi_{2,n}^{-1}(L(\Phi, z_2, \dots, z_n) \cdot (\#, \dots, \#)^*) \cap SUP_n.$$

Donc $L(\Phi, z_1, z_2, \dots, z_n)$ est rationnel.

Cas 2(connecteur) : $\Phi = \psi \circ \theta, n \geq 0$ où \circ est l'un des connecteurs \vee, \wedge, \neg .

$$L(\Phi, z_1, z_2, \dots, z_n) = L(\psi, z_1, z_2, \dots, z_n) \odot L(\theta, z_1, z_2, \dots, z_n)$$

où \odot est l'opérateur booléen qui traduit le connecteur \circ selon le dictionnaire :

$$(\vee, \wedge, \neg) \rightarrow (\cup, \cap, L \mapsto (SUP_n - L))$$

Cas 3(quantificateur existentiel) : $\Phi = \exists z_1 \psi$.

Posons

$$P := [\pi_{2,n}(L(\psi, z_1, z_2, \dots, z_n))].$$

Par hypothèse de récurrence P est rationnel.

Les mots de $L(\Phi, z_1, z_2, \dots, z_n)$ sont les superpositions de n mots de X^* dont la projection sur les composantes $2, 3, \dots, n$ (i.e. l'image par $\pi_{2,n}$) est égale à celle d'un mot de $L(\psi, z_1, z_2, \dots, z_n)$, sauf pour un suffixe dans $(\#, \#, \dots, \#)^*$. Plus formellement :

$$L(\Phi, z_1, z_2, \dots, z_n) = [\pi_{2,n}^{-1}(P((\#, \dots, \#)^*)^{-1}) \cup \pi_{2,n}^{-1}(P(\#, \dots, \#)^*)] \cap SUP_n.$$

Les propriétés de stabilité de l'ensemble des langages rationnels par quotient à droite, par produit et par opérations booléennes entraînent que $L(\Phi, z_1, z_2, \dots, z_n)$ est rationnel.

Cas 4(quantificateur universel) : $\Phi = \forall z_1 \psi$.

On remarque que Φ est équivalente à

$$\Phi' := \neg \exists z_1 \neg \psi.$$

Par hypothèse de récurrence $L(\psi, z_1, z_2, \dots, z_n)$ est rationnel. Par les transformations vues aux cas 2 et 3, il en résulte que $L(\Phi, z_1, z_2, \dots, z_n)$ est rationnel.

5- Soit $x \in X$.

Considérons l'automate fini $\mathcal{A}_x = \langle X, Q, D, Q_+, \delta \rangle$ tel que : $Q := \{q_\varepsilon, q_\#\} \cup \{q_y \mid y \in X\}$, $D := \{q_\varepsilon\}$, $Q_+ := \{q_\#\}$ et δ est l'ensemble de toutes les transitions de la forme :

$$\begin{aligned} q_\varepsilon &\xrightarrow{(y,x)} q_y \text{ où } y \in X \\ q_y &\xrightarrow{(z,y)} q_z \text{ où } y \in X, z \in X \\ q_y &\xrightarrow{(\#,y)} q_\# \text{ où } y \in X \\ q_\varepsilon &\xrightarrow{(\#,x)} q_\# \end{aligned}$$

Cet automate, lorsqu'il démarre dans l'état q_ε et lit un mot $(y_0, x)(y_1, y_0) \cdots (y_i, y_{i-1}) \cdots (y_n, y_{n-1})$, atteint l'état q_{y_n} ,

lorsqu'il lit $(y_0, x)(y_1, y_0) \cdots (y_i, y_{i-1}) \cdots (y_n, y_{n-1})(\#, y_n)$, atteint l'état $q_\#$,

et ne peut lire, à partir de q_ε , que des mots de l'une de ces deux formes. Donc

$$L(\mathcal{A}_x) = \{S(u, v) \mid u, v \in X^*, x \cdot u = v\}.$$

6- Nous construisons une formule $\Phi(u, v)$ qui exprime le fait que $x \cdot u = v$.

Cette formule Φ est la conjonction de 4 formules *LONG*, *DEB*, *MIL*, *FIN* qui expriment, respectivement, que :

- $|u| + 1 = |v|$
- v commence par la lettre x
- si yz est un facteur de u , en position p , alors la lettre de v , en position $p + 1$, est aussi y
- u et v se terminent par une même lettre y .

Posons

$$LONG(u, v) := s_x(u) \approx v$$

$$DEB(u, v) := \forall w', [(\forall w, w' \preceq w) \rightarrow (s_x(w') \preceq v)]$$

$$MIL(u, v) := \forall w, \forall w', \bigwedge_{y \in X, z \in X} [(s_z(s_y(w)) \preceq u \wedge (s_z(s_y(w)) \approx w' \wedge w' \preceq v) \rightarrow (\exists w'', s_y(w'') = w'))]$$

$$FIN(u, v) := \forall w, \exists w', \bigwedge_{y \in X} [s_y(w) = u \rightarrow s_y(w') = v]$$

On définit alors

$$\Phi(u, v) := LONG(u, v) \wedge DEB(u, v) \wedge MIL(u, v) \wedge FIN(u, v).$$