LOGIQUE, IN7M12

Devoir surveillé du 16/10/2015- Corrigé.

Tous documents autorisés; durée: 1h 30.

Les exercices sont indépendants.

La note obtenue à cette épreuve sera $min\{exo1 + exo2 + exo3 + Pb, 20\}$.

Exercice 1 (4 pts)

Fournissons les preuve demandées :

$$\frac{\overline{B \vdash B, C} \stackrel{\mathsf{ax}'}{} \overline{B, C \vdash C} \stackrel{\mathsf{ax}'}{}}{\overline{B, C \vdash C}} \stackrel{\mathsf{ax}'}{} \frac{\overline{B, B \to C \vdash C}}{} \stackrel{\mathsf{ax}'}{} \frac{}{P(x) \vdash P(x)} \stackrel{\mathsf{ax}}{} \frac{}{P(x)} \stackrel{\mathsf{ax}}{} \frac{}{P(x)}$$

Exercice 2 (4 pts)

Fournissons les preuves demandées :

$$\frac{\frac{\neg A, Q(x) \vdash Q(x)}{\neg A, \neg Q(x) \vdash \neg A}^{\mathsf{ax'}}}{\frac{\neg A, \neg Q(x) \vdash \neg A}{\neg A \land \neg Q(x) \vdash \neg A}^{\land l}} \underbrace{\frac{\frac{\neg A, Q(x) \vdash Q(x)}{\neg A, \neg Q(x), Q(x) \vdash}^{\neg l}}{\neg A \land \neg Q(x), Q(x) \vdash}^{\land l}}_{\forall x (\neg A \land \neg Q(x)), Q(x) \vdash}^{\forall l}}_{\forall x (\neg A \land \neg Q(x)), \exists x Q(x) \vdash}^{\exists l}} \underbrace{\frac{(\neg A) \rightarrow \exists x Q(x), \forall x (\neg A \land \neg Q(x)) \vdash}{(\neg A) \rightarrow \exists x Q(x) \vdash \neg \forall x (\neg A \land \neg Q(x))}^{\neg r}}_{\neg l}$$

$$\frac{\frac{\overline{Q(x) \vdash Q(x)}}{A \vdash A}^{\mathsf{ax}}}{\frac{A \vdash A \lor \exists x Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x Q(x)}^{\exists_r}} \frac{\frac{\overline{Q(x) \vdash Q(x)}}{Q(x) \vdash \exists x Q(x)}^{\exists_r}}{\frac{A \lor Q(x) \vdash A \lor \exists x Q(x)}{\exists x (A \lor Q(x)) \vdash A \lor \exists x Q(x)}^{\exists_l}}$$

Exercice 3 (4 pts)

1- Calculons les valeurs des assertions $k \mid \vdash -\Psi$ pour $k \in K$ et Ψ sous-formule de $[\neg(A \land B)] \rightarrow [(\neg A) \lor (\neg \neg \neg B)]$. On part de la relation de forçage initiale, puis on applique la définition inductive de la relation $\mid \vdash -$.On obtient :

$k \mid \vdash - \Psi \mid$	A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg \neg B)$	$\neg\neg\neg B)$	$(\neg A) \vee (\neg \neg \neg B)$	Φ
k_2	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
k_1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
k_0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

où l'on a noté $\Phi := [\neg (A \land B)] \to [(\neg A) \lor \neg \neg \neg B)]$. En particulier

$$k_0 \models \neg (A \land B), \quad k_0 \models \neg (\neg A) \lor (\neg \neg \neg B)$$

$$k_0 \models \neg [\neg (A \land B)] \to [(\neg A) \lor (\neg \neg \neg B)]$$

2- Comme S_1 admet un contre-modèle de Kripke, il n'est pas prouvable dans LJ. Voici une preuve de S_1 dans LK :

$$\frac{\overline{A,B \vdash A}^{\text{ax}'} \overline{A,B \vdash B}^{\text{ax}'}}{\underline{A,B \vdash A \land B}^{\neg r} \wedge_{r}}$$

$$\frac{\overline{A,B \vdash A \land B}^{\neg r}}{\overline{A,\neg \neg B, \neg (A \land B)}^{\neg l}}$$

$$\frac{\overline{A,\neg \neg B, \neg (A \land B)}^{\neg l}}{\overline{\neg (A \land B)} \vdash \neg A, \neg \neg \neg B}^{\neg l}$$

$$\frac{\overline{\neg (A \land B)} \vdash (\neg A) \lor \neg \neg B}{}^{\lor r}$$

$$\vdash (\neg (A \land B)) \to (\neg A) \lor \neg \neg B}^{\rightarrow r}$$

3- D'après le tableau de la question 1, $k_2 \mid \vdash -A \lor \neg \neg B$, donc $k_2 \not \mid \vdash -\neg (A \lor \neg \neg B)$. Comme $k_0 \leq k_2$, par croissance de la relation de forçage, $k_0 \not \mid \vdash -\neg (A \lor \neg \neg B)$.

Mais $k_0 \mid \vdash \neg (\neg (A \land B))$ (voir le tableau de la question 1).

Donc
$$k_0 \not\vdash - (\neg(A \land B)) \rightarrow \neg(A \lor \neg \neg B).$$

Par conséquent, d'après le théorème d'adéquation, S_2 n'est pas prouvable dans LJ.

Le séquent S_2 n'est pas valide dans la structure classique (propositionnelle) définie par :

$$\nu(A) := 1, \nu(B) := 0.$$

En effet : $\nu(A \wedge B) = 0$ donc $\nu(\neg(A \wedge B)) = 1$, $\nu(A \vee \neg \neg B) = 1$ donc $\nu(\neg(A \vee \neg \neg B)) = 0$ donc

$$\nu([\neg(A \land B)] \to [\neg(A \lor \neg\neg B)]) = 1.$$

 S_2 admet un contre-modèle classique, donc S_2 n'est pas prouvable dans LK. (On retrouve aussi le fait que S_2 n' est pas prouvable dans LJ).

Problème (20 pts)

Partie 1 : simuler SH_0 dans LJ_0

1- Voici des preuves dans LJ_0 de \vdash AX_1 et \vdash AX_2 .

$$\frac{\overline{A \vdash A}^{\text{ax}} \overline{B, A \vdash B}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow B, A \vdash B}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow B, A \vdash B}^{\text{ax}'}}{\overline{C, A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow B, A \vdash B}^{\text{ax}'}}{\overline{C, A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow B, A \vdash B}^{\text{ax}'}}{\overline{B \rightarrow C, A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}}{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{ax}'}}} \frac{\overline{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C}^{\text{a$$

2- Voici une preuve dans LJ₀ de $\vdash B$, sous les hypothèses $\vdash A$ et $\vdash A \rightarrow B$:

$$\frac{ \frac{}{ \vdash A \to B}^{\text{Hyp}} \frac{\overline{\vdash A}^{\text{Hyp}} \overline{B \vdash B}^{\text{ax}}_{\rightarrow l}}{A \to B \vdash B}_{\text{cut}}^{\text{cut}}}{\vdash B}$$

3- Pour toute formule Ψ notons $\delta(\Psi)$ le séquent $\vdash \Psi$. Les traductions par δ des axiomes de SH_0 sont prouvables dans LJ_0 (Q1) et la traduction par δ de la règle de déduction de SH_0 est une règle dérivé de LJ_0 (Q2). Donc toute preuve de SH_0 est traductible en une preuve de LJ_0 . Donc, si Φ a une preuve dans SH_0 , alors $\vdash \Phi$ a une preuve dans LJ_0 .

Partie 2 : simuler LJ_0 dans SH_0

* 4- Voici une preuve dans SH_0 de la formule $P \to P$

$$\frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX1}} \frac{\overline{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}^{\text{AX1}} \frac{\overline{\{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)\}} \rightarrow \{[P \rightarrow (P \rightarrow P)] \rightarrow [P \rightarrow P]\}}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX2}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX3}} \frac{\overline{\{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)\}} \rightarrow \{[P \rightarrow (P \rightarrow P)] \rightarrow [P \rightarrow P]\}}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX4}} \frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow (P \rightarrow P)}{P \rightarrow (P \rightarrow P)}^{\text{AX5}} \frac{P \rightarrow$$

5- Voici une preuve, dans SH_0 , de $A \to B$, sous l'hypothèse B:

$$\frac{\overline{B}^{\text{Hyp}}}{A \to B} \frac{\overline{B} \to (A \to B)}{A \to B}^{\text{AX1}}$$

- 6- Supposons que $\frac{B_1,\dots,B_n}{C}$ $_{\mathsf{SH}_0}$ i.e. qu'il existe une preuve de C dans le système SH_0 augmenté des hypothèses B_1,\dots,B_n . Dans cette preuve remplaçons :
- chaque hypothèse B_i par $A \to B_i$
- chaque instance $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$ du schéma d'axiome AX_1 par l'instance

$$[A \to \Phi] \to ([A \to \Psi] \to [A \to \Phi])$$

- chaque instance $(\Phi\to (\Psi\to \xi))\to ((\Phi\to \Psi)\to (\Phi\to \xi))$ du schéma d'axiome AX_2 par l'instance

$$([A \to \Phi] \to ([A \to \Psi] \to [A \to \xi])) \to (([A \to \Phi] \to [A \to \Psi]) \to ([A \to \Phi] \to [A \to \xi]))$$

- chaque instance de MP, $\frac{\Phi,~\Phi\to\Psi}{\Psi},$ par l'instance

$$\frac{[A \to \Phi], \ [A \to \Phi] \to [A \to \Psi]}{[A \to \Psi]}.$$

On obtient une preuve de $[A \to C]$ sous les hypothèses $[A \to B_1], \ldots, [A \to B_n]$. 7- Supposons que

$$\frac{A, B_1, \dots, B_n, D}{C} \operatorname{SH}_0 \cdot$$

Par Q6,

$$\frac{A \to A, A \to B_1, \dots, A \to B_n, A \to D}{A \to C} \mathsf{SH}_0$$

et par Q4, l'hypothèse $A \to A$ peut être remplaçée par une preuve dans SH_0 . Donc

$$\frac{A \to B_1, \dots, A \to B_n, A \to D}{A \to C} \mathsf{SH}_0.$$

Par Q5, pour tout $i \in [1, n]$, $\frac{B_i}{A \to B_i}$ SH₀. En remplaçant, dans la preuve ci-dessus, chaque hypothèse $A \to B_i$ par une preuve avec hypothèse B_i , on obtient

$$\frac{B_1,\ldots,B_n,A\to D}{A\to C}\mathsf{SH}_0.$$

De même, en remplaçant, dans cette dernière preuve, l'hypothèse $A \to D$ par une preuve avec hypothèse D, on obtient

$$\frac{B_1,\ldots,B_n,D}{A\to C}\operatorname{SH}_0.$$

8- Voici une preuve, dans SH_0 , de C, sous les hypothèses $A, B, A \to (B \to C)$:

$$\frac{B}{B}^{\mathrm{Hyp}} \frac{\overline{A}^{\mathrm{Hyp}}}{A \to (B \to C)}^{\mathrm{Hyp}}_{\mathrm{MP}}$$

En appliquant deux fois Q7, on obtient successivement

$$\frac{B,A\to(B\to C)}{A\to C}_{\mathsf{SH}_0}, \ \frac{A\to(B\to C)}{B\to(A\to C)}_{\mathsf{SH}_0}.$$

* 9- **Base** : $Card(\Gamma) \in \{0, 1\}.$

Alors $\tau_1(\Gamma \vdash \Phi) = \tau_2(\Gamma \vdash \Phi)$.

Si Card $(\Gamma) = 2$ i.e. $\Gamma = \{A_1, A_2\}$ alors $\tau_1(\Gamma \vdash \Phi) = A_1 \to (A_2 \to \Phi), \quad \tau_2(\Gamma \vdash \Phi) = A_2 \to (A_1 \to \Phi).$ Donc, par Q8,

$$\frac{\tau_1(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_2(\Gamma \vdash \Phi)}$$
SH₀.

Induction Card(Γ) = n + 1 et $n \ge 2$, i.e. $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}.$

Supposons que $A_1 \prec_1 A_2 \ldots \prec_1 A_{n+1}$ et $A_{\sigma(1)} \prec_2 A_{\sigma(2)} \ldots \prec_2 A_{\sigma(n+1)}$ (pour une permutation σ de [1, n+1]).

La permutation σ a une décomposition en produit de 3 permutations

$$\sigma = \gamma \circ \beta \circ \alpha$$

avec $\alpha(1) = 1, \forall i \in [3, n+1], \beta(\alpha(i)) = \alpha(i) \text{ et } \gamma(\beta(\alpha(1))) = \beta(\alpha(1)).$

Pour toute permutation δ de [1, n+1], notons τ_{δ} la traduction associée à un ordre tel que

$$A_{\delta(1)} \prec A_{\delta(2)} \ldots \prec A_{\delta(n+1)}$$

Ainsi $\tau_1 = \tau_{\text{Id}}$ et $\tau_2 = \tau_{\sigma}$.

Par hypothèse de récurrence :

$$\frac{A_2 \to (A_3 \to \cdots \to (A_n \to \Phi))}{A_{\alpha(2)} \to (A_{\alpha(3)} \to \cdots \to (A_{\alpha(n+1)} \to \Phi))} \operatorname{SH}_0,$$

et en appliquant Q6 (avec $A := A_1$):

$$\frac{\tau_1(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_\alpha(\Gamma \vdash \Phi))} \mathsf{SH}_0. \tag{1}$$

Posons $\Psi:=A_{\alpha(3)}\to (\cdots\to (A_{\alpha(n+1)}\to \Phi))$. Par Q8 :

$$\frac{A_{\alpha(1)} \to (A_{\alpha(2)} \to \Psi))}{A_{\beta(\alpha(1))} \to (A_{\beta(\alpha(2))} \to \Psi))} \mathsf{SH}_0, \quad \text{i.e. } \frac{\tau_{\alpha}(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_{\beta \circ \alpha}(\Gamma \vdash \Phi))} \mathsf{SH}_0. \tag{2}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\frac{A_{\beta(\alpha(2))} \to (A_{\beta(\alpha(3))} \to \cdots \to (A_{\beta(\alpha(n+1))} \to \Phi))}{A_{\sigma(2)} \to (A_{\sigma(3)} \to \cdots \to (A_{\sigma(n+1)} \to \Phi))} \mathsf{SH}_0,$$

et en appliquant Q6 (avec $A := A_{\sigma(1)}$):

$$\frac{\tau_{\beta \circ \alpha}(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_{\sigma}(\Gamma \vdash \Phi))} \mathsf{SH}_{0}. \tag{3}$$

En enchaînant les 3 règles dérivées (1)(2)(3) on obtient que

$$\frac{\tau_1(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_2(\Gamma \vdash \Phi)}$$
SH₀.

10-10.1

Cas 1 : Supposons que $\forall \Phi \in \Gamma, \Phi \prec A$. Alors $\tau(\Gamma, A \vdash B) = \tau(\Gamma \vdash A \rightarrow B)$. Donc

$$\frac{\tau(\Gamma, A \vdash B)}{\tau(\Gamma \vdash A \to B)} \mathsf{SH}_0.$$

Cas 2 : Supposons que $A \notin \Gamma$.

Il existe un pordre total \prec_1 tel que $\forall \Phi \in \Gamma, \Phi \prec_1 A$. D'après le cas 1, appliqué à cet ordre

$$\frac{\underline{\tau_1(\Gamma, A \vdash B)}}{\overline{\tau_1(\Gamma \vdash A \to B)}} \mathsf{SH}_0,$$

et par Q9, on a les deux règles

$$\frac{\tau(\Gamma, A \vdash B)}{\tau_1(\Gamma, A \vdash B)} \mathsf{SH}_0, \quad \frac{\tau_1(\Gamma \vdash A \to B)}{\tau(\Gamma \vdash A \to B)} \mathsf{SH}_0$$

donc, en enchaînant les trois règles dérivées :

$$\frac{\tau(\Gamma, A \vdash B)}{\tau(\Gamma \vdash A \to B)} \mathsf{SH}_0.$$

Cas 3 : Supposons que $A \in \Gamma$.

Alors $(\Gamma, A) = \Gamma$. Il suffit donc de montrer que

$$\frac{\tau(\Gamma \vdash B)}{\tau(\Gamma \vdash [A \to B])} \operatorname{SH}_0.$$

Par Q5, $\frac{B}{A \to B}$ SH₀, et a fortiori

$$\frac{A_1,\ldots,A_n,B}{A\to B}$$
 SH₀,

puis, en appliquant n fois Q7:

$$\frac{A_1 \to (A_2 \to \cdots \to (A_n \to B))}{A_1 \to (A_2 \to \cdots \to (A_n \to [A \to B]))} \mathsf{SH}_0.$$

10.2 Voici une preuve, dans SH_0 , de $(A \to B) \to C$, sous les hypothèses $A, A \to B, B \to C$:

$$\frac{\overline{A}^{\text{ Hyp}} \ \overline{A \to B}^{\text{ Hyp}}_{\text{ MP}}}{\underline{B} \ \overline{C}^{\text{ Hyp}}_{\text{ MP}}}$$

En utilisant Q7, on en déduit :

$$\frac{\underline{A} \quad \underline{B} \to \underline{C}}{(A \to B) \to \underline{C}} \operatorname{SH}_0,$$

Soit \prec_1 un ordre qui classe B plus grand que toutes les formules de Γ . En appliquant Q6 n fois :

$$\frac{\tau_1(\Gamma \models A) \quad \tau_1(\Gamma, B \models C)}{\tau_1(\Gamma, A \to B \models C)} \mathsf{SH}_0.$$

En utilisant Q9, on en déduit que cette règle dérivée est valide aussi pour l'ordre \leq , donc

$$\frac{\tau(\Gamma \models A) \quad \tau(\Gamma, B \models C)}{\tau(\Gamma, A \to B \models C)} \mathsf{SH}_0$$

10.3 Suposons que A est plus petite que toutes les formules de Γ .

Alors
$$\tau(\Gamma, A \vdash C) = A \to \tau(\Gamma \vdash C)$$
.

Donc l'image par τ de la règle d'affaiblissement à gauche est

qui est règle dérivée de SH_0 , d'après Q5. On conclut dans le cas gén'eral en utilisant Q9. 10.4 Suppposons que les formules de Γ soient, par ordre croissant,

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$$

et que $A \prec \Phi_1$. Alors

$$\tau(\Gamma \vdash A) = \Phi_1 \to (\Phi_2 \to \cdots \to (\Phi_n \to A)), \quad \tau(A, \Gamma \vdash C) = A \to (\Phi_1 \to (\Phi_2 \to \cdots \to (\Phi_n \to C))).$$

Remarquons que

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, A, A \to (\Phi_1 \to (\Phi_2 \to \dots \to (\Phi_n \to C)))}{C} \mathsf{SH}_0$$

en utilisant (n+1) fois la règle MP. En appliquant Q7 n fois (à cette règle dérivée) on déduit que :

$$\frac{\Phi_1 \to (\Phi_2 \to \cdots \to (\Phi_n \to A)) \quad A \to (\Phi_1 \to (\Phi_2 \to \cdots \to (\Phi_n \to C)))}{\Phi_1 \to (\Phi_2 \to \cdots \to (\Phi_n \to C))} \mathsf{SH}_0$$

c'est à dire :

$$\frac{\tau(\Gamma \vdash A) \quad \tau(A, \Gamma \vdash C)}{\tau(\Gamma \vdash C)} \operatorname{SH}_0$$

En utilisant Q9, on en déduit que cette règle dérivée est valide (indépendamment de notre supposition concernant $A \prec \Phi_1$).

- 11- Soit $\Gamma \vdash \Phi$ un séquent intuitionniste et π une preuve dans LJ_0 de ce séquent. En appliquant τ à cette preuve et en substituant à chaque règle dérivée une preuve (avec hypothèses) dans SH_0 , on obtient une preuve dans SH_0 de $\tau(\Gamma \vdash \Phi)$.
- 12- On peut conclure que, pour toute formule minimale $\Phi:\Phi$ est prouvable dans SH_0 si et seulement si $\vdash \Phi$ est prouvable dans LJ_0 :
- "seulement si" a été prouvé à la question 3
- "si" résulte de la question 11, puisque $\tau(\vdash \Phi) = \Phi$.