

- chaque instance de MP, $\frac{\Phi, \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$, par l'instance

$$\frac{[A \rightarrow \Phi], [A \rightarrow \Phi] \rightarrow [A \rightarrow \Psi]}{[A \rightarrow \Psi]}.$$

On obtient une preuve de $[A \rightarrow C]$ sous les hypothèses $[A \rightarrow B_1], \dots, [A \rightarrow B_n]$.

7- Supposons que

$$\frac{A, B_1, \dots, B_n, D}{C} \text{SH}_0.$$

Par Q6,

$$\frac{A \rightarrow A, A \rightarrow B_1, \dots, A \rightarrow B_n, A \rightarrow D}{A \rightarrow C} \text{SH}_0$$

et par Q4, l'hypothèse $A \rightarrow A$ peut être remplacée par une preuve dans SH_0 . Donc

$$\frac{A \rightarrow B_1, \dots, A \rightarrow B_n, A \rightarrow D}{A \rightarrow C} \text{SH}_0.$$

Par Q5, pour tout $i \in [1, n]$, $\frac{B_i}{A \rightarrow B_i} \text{SH}_0$. En remplaçant, dans la preuve ci-dessus, chaque hypothèse $A \rightarrow B_i$ par une preuve avec hypothèse B_i , on obtient

$$\frac{B_1, \dots, B_n, A \rightarrow D}{A \rightarrow C} \text{SH}_0.$$

De même, en remplaçant, dans cette dernière preuve, l'hypothèse $A \rightarrow D$ par une preuve avec hypothèse D , on obtient

$$\frac{B_1, \dots, B_n, D}{A \rightarrow C} \text{SH}_0.$$

8- Voici une preuve, dans SH_0 , de C , sous les hypothèses $A, B, A \rightarrow (B \rightarrow C)$:

$$\frac{\frac{B}{B} \text{Hyp} \frac{\frac{A}{A} \text{Hyp} \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow C} \text{MP}}{C} \text{MP}}{C} \text{MP}$$

En appliquant deux fois Q7, on obtient successivement

$$\frac{B, A \rightarrow (B \rightarrow C)}{A \rightarrow C} \text{SH}_0, \quad \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)} \text{SH}_0.$$

* 9- **Base** : $\text{Card}(\Gamma) \in \{0, 1\}$.

Alors $\tau_1(\Gamma \vdash \Phi) = \tau_2(\Gamma \vdash \Phi)$.

Si $\text{Card}(\Gamma) = 2$ i.e. $\Gamma = \{A_1, A_2\}$ alors $\tau_1(\Gamma \vdash \Phi) = A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \Phi)$, $\tau_2(\Gamma \vdash \Phi) = A_2 \rightarrow (A_1 \rightarrow \Phi)$. Donc, par Q8,

$$\frac{\tau_1(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_2(\Gamma \vdash \Phi)} \text{SH}_0.$$

Induction $\text{Card}(\Gamma) = n + 1$ et $n \geq 2$, i.e. $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$.

Supposons que $A_1 \prec_1 A_2 \dots \prec_1 A_{n+1}$ et $A_{\sigma(1)} \prec_2 A_{\sigma(2)} \dots \prec_2 A_{\sigma(n+1)}$ (pour une permutation σ de $[1, n + 1]$).

La permutation σ a une décomposition en produit de 3 permutations

$$\sigma = \gamma \circ \beta \circ \alpha$$

avec $\alpha(1) = 1, \forall i \in [3, n+1], \beta(\alpha(i)) = \alpha(i)$ et $\gamma(\beta(\alpha(1))) = \beta(\alpha(1))$.

Pour toute permutation δ de $[1, n+1]$, notons τ_δ la traduction associée à un ordre tel que

$$A_{\delta(1)} \prec A_{\delta(2)} \dots \prec A_{\delta(n+1)}$$

Ainsi $\tau_1 = \tau_{\text{Id}}$ et $\tau_2 = \tau_\sigma$.

Par hypothèse de récurrence :

$$\frac{A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots \rightarrow (A_n \rightarrow \Phi))}{A_{\alpha(2)} \rightarrow (A_{\alpha(3)} \rightarrow \dots \rightarrow (A_{\alpha(n+1)} \rightarrow \Phi))} \text{SH}_0,$$

et en appliquant Q6 (avec $A := A_1$) :

$$\frac{\tau_1(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_\alpha(\Gamma \vdash \Phi)} \text{SH}_0. \quad (1)$$

Posons $\Psi := A_{\alpha(3)} \rightarrow (\dots \rightarrow (A_{\alpha(n+1)} \rightarrow \Phi))$. Par Q8 :

$$\frac{A_{\alpha(1)} \rightarrow (A_{\alpha(2)} \rightarrow \Psi)}{A_{\beta(\alpha(1))} \rightarrow (A_{\beta(\alpha(2))} \rightarrow \Psi)} \text{SH}_0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\tau_\alpha(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_{\beta \circ \alpha}(\Gamma \vdash \Phi)} \text{SH}_0. \quad (2)$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\frac{A_{\beta(\alpha(2))} \rightarrow (A_{\beta(\alpha(3))} \rightarrow \dots \rightarrow (A_{\beta(\alpha(n+1))} \rightarrow \Phi))}{A_{\sigma(2)} \rightarrow (A_{\sigma(3)} \rightarrow \dots \rightarrow (A_{\sigma(n+1)} \rightarrow \Phi))} \text{SH}_0,$$

et en appliquant Q6 (avec $A := A_{\sigma(1)}$) :

$$\frac{\tau_{\beta \circ \alpha}(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_\sigma(\Gamma \vdash \Phi)} \text{SH}_0. \quad (3)$$

En enchaînant les 3 règles dérivées (1)(2)(3) on obtient que

$$\frac{\tau_1(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_2(\Gamma \vdash \Phi)} \text{SH}_0.$$

10- 10.1

Cas 1 : Supposons que $\forall \Phi \in \Gamma, \Phi \prec A$. Alors $\tau(\Gamma, A \vdash B) = \tau(\Gamma \vdash A \rightarrow B)$. Donc

$$\frac{\tau(\Gamma, A \vdash B)}{\tau(\Gamma \vdash A \rightarrow B)} \text{SH}_0.$$

Cas 2 : Supposons que $A \notin \Gamma$.

Il existe un pordre total \prec_1 tel que $\forall \Phi \in \Gamma, \Phi \prec_1 A$. D'après le cas 1, appliqué à cet ordre

$$\frac{\tau_1(\Gamma, A \vdash B)}{\tau_1(\Gamma \vdash A \rightarrow B)} \text{SH}_0,$$

et par Q9, on a les deux règles

$$\frac{\tau(\Gamma, A \vdash B)}{\tau_1(\Gamma, A \vdash B)} \text{SH}_0, \quad \frac{\tau_1(\Gamma \vdash A \rightarrow B)}{\tau(\Gamma \vdash A \rightarrow B)} \text{SH}_0$$

donc, en enchaînant les trois règles dérivées :

$$\frac{\tau(\Gamma, A \vdash B)}{\tau(\Gamma \vdash A \rightarrow B)} \text{SH}_0.$$

Cas 3 : Supposons que $A \in \Gamma$.

Alors $(\Gamma, A) = \Gamma$. Il suffit donc de montrer que

$$\frac{\tau(\Gamma \vdash B)}{\tau(\Gamma \vdash [A \rightarrow B])} \text{SH}_0.$$

Par Q5, $\frac{B}{A \rightarrow B} \text{SH}_0$, et a fortiori

$$\frac{A_1, \dots, A_n, B}{A \rightarrow B} \text{SH}_0,$$

puis, en appliquant n fois Q7 :

$$\frac{A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (A_n \rightarrow B))}{A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (A_n \rightarrow [A \rightarrow B]))} \text{SH}_0.$$

10.2 Voici une preuve, dans SH_0 , de $(A \rightarrow B) \rightarrow C$, sous les hypothèses $A, A \rightarrow B, B \rightarrow C$:

$$\frac{\frac{A \text{ Hyp} \quad \frac{A \rightarrow B \text{ Hyp}}{B} \text{MP}}{B \rightarrow C} \text{Hyp}}{C} \text{MP}$$

En utilisant Q7, on en déduit :

$$\frac{A \quad B \rightarrow C}{(A \rightarrow B) \rightarrow C} \text{SH}_0,$$

Soit \prec_1 un ordre qui classe B plus grand que toutes les formules de Γ . En appliquant Q6 n fois :

$$\frac{\tau_1(\Gamma \vdash A) \quad \tau_1(\Gamma, B \vdash C)}{\tau_1(\Gamma, A \rightarrow B \vdash C)} \text{SH}_0.$$

En utilisant Q9, on en déduit que cette règle dérivée est valide aussi pour l'ordre \preceq , donc

$$\frac{\tau(\Gamma \vdash A) \quad \tau(\Gamma, B \vdash C)}{\tau(\Gamma, A \rightarrow B \vdash C)} \text{SH}_0$$

10.3 Supposons que A est plus petite que toutes les formules de Γ .

Alors $\tau(\Gamma, A \vdash C) = A \rightarrow \tau(\Gamma \vdash C)$.

Donc l'image par τ de la règle d'affaiblissement à gauche est

$$\frac{\tau(\Gamma \vdash C)}{A \rightarrow \tau(\Gamma \vdash C)}$$

qui est règle dérivée de SH_0 , d'après Q5. On conclut dans le cas général en utilisant Q9.

10.4 Supposons que les formules de Γ soient, par ordre croissant,

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$$

et que $A \prec \Phi_1$.

Alors

$$\tau(\Gamma \vdash A) = \Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow A)), \quad \tau(A, \Gamma \vdash C) = A \rightarrow (\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow C))).$$

Remarquons que

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, A, A \rightarrow (\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow C)))}{C} \text{SH}_0$$

en utilisant $(n + 1)$ fois la règle MP. En appliquant Q7 n fois (à cette règle dérivée) on déduit que :

$$\frac{\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow A)) \quad A \rightarrow (\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow C)))}{\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow C))} \text{SH}_0$$

c'est à dire :

$$\frac{\tau(\Gamma \vdash A) \quad \tau(A, \Gamma \vdash C)}{\tau(\Gamma \vdash C)} \text{SH}_0$$

En utilisant Q9, on en déduit que cette règle dérivée est valide (indépendamment de notre supposition concernant $A \prec \Phi_1$).

11- Soit $\Gamma \vdash \Phi$ un séquent intuitionniste et π une preuve dans LJ₀ de ce séquent. En appliquant τ à cette preuve et en substituant à chaque règle dérivée une preuve (avec hypothèses) dans SH₀, on obtient une preuve dans SH₀ de $\tau(\Gamma \vdash \Phi)$.

12- On peut conclure que, pour toute formule minimale Φ : Φ est prouvable dans SH₀ si et seulement si $\vdash \Phi$ est prouvable dans LJ₀ :

- "seulement si" a été prouvé à la question 3
- "si" résulte de la question 11, puisque $\tau(\vdash \Phi) = \Phi$.