

LOGIQUE, IN7M12
Devoir surveillé du 12/10/2012- Corrigé.

Tous documents autorisés ; durée : 1h 30.
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (6 pts)

1- Fournissons les preuve demandées :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)}{ax} \quad \frac{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow B}{\wedge_e}}{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C), A \vdash A}{ax} \quad \frac{\frac{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C}{ax} \quad \frac{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C), A \vdash B \rightarrow C}{\wedge_e}}{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C), A \vdash B \rightarrow C}{\rightarrow_e}}{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C), A \vdash B} \quad \frac{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C), A \vdash C}{\rightarrow_e}}{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C} \rightarrow_i$$

$$\frac{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C), A \vdash C}{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C} \rightarrow_i$$

$$\frac{}{\vdash ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)} \rightarrow_i$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\exists x \neg P(x), \forall y P(y), \neg P(z) \vdash \forall y P(y)}{ax} \quad \frac{\exists x \neg P(x), \forall y P(y), \neg P(z) \vdash P(z)}{\forall_e} \quad \frac{\exists x \neg P(x), \forall y P(y), \neg P(z) \vdash \neg P(z)}{ax}}{\exists x \neg P(x), \forall y P(y) \vdash \exists z \neg P(z)} ax \quad \frac{\frac{\exists x \neg P(x), \forall y P(y), \neg P(z) \vdash \perp}{\exists_e}}{\exists x \neg P(x), \forall y P(y) \vdash \perp} \exists_e}}{\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall y P(y)} \neg_i$$

2- Les deux preuves ci-dessus n'utilisent que des règles de NJ, donc les deux séquents sont prouvables dans NJ.

Exercice 2 (6 pts)

1- Fournissons les preuves demandées :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{B \vdash B, C}{ax'} \quad \frac{B, \neg B \vdash C}{\neg_g} \quad \frac{C, \neg B \vdash C}{ax'}}{B \vee C, \neg B \vdash C} \vee_g} \quad \frac{\frac{A \vdash A}{ax} \quad \frac{\vdash \neg A, A}{\neg_d}}{\vdash \neg A, A, \neg B \rightarrow C} aff_d \quad \frac{\frac{\frac{B \vee C, \neg B \vdash C}{\rightarrow_d} \quad \frac{B \vee C \vdash \neg B \rightarrow C}{aff_d}}{\frac{B \vee C \vdash A, \neg B \rightarrow C}{\vee_d}}{\vdash \neg A, A \vee (\neg B \rightarrow C)} \vee_d}}{\vdash \neg A, A \vee (\neg B \rightarrow C)} \rightarrow_g \quad \frac{\frac{B \vee C \vdash A, \neg B \rightarrow C}{\vee_d}}{\frac{B \vee C \vdash A \vee (\neg B \rightarrow C)}{\rightarrow_g}}{\neg A \rightarrow (B \vee C) \vdash A \vee (\neg B \rightarrow C)} \rightarrow_g$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{A \vdash A, Q(x)}{ax'} \quad \frac{A \vdash A \vee Q(x)}{\vee_d} \quad \frac{A \vdash \exists x A \vee Q(x)}{\exists_d}}{\vdash \neg A, \exists x(A \vee Q(x))} \neg_d \quad \frac{\frac{\frac{Q(x) \vdash A, Q(x)}{ax'} \quad \frac{Q(x) \vdash A \vee Q(x)}{\vee_d} \quad \frac{Q(x) \vdash \exists x(A \vee Q(x))}{\exists_d}}{\exists x Q(x) \vdash \exists x(A \vee Q(x))} \exists_g}}{\neg A \rightarrow \exists x Q(x) \vdash \exists x(A \vee Q(x))} \rightarrow_g$$

2- Voici une preuve dans LJ du séquent de l'énoncé :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\text{ax}}}{A \vdash A \vee Q(x)}^{\vee_d^1} \quad \frac{\frac{\overline{Q(x) \vdash Q(x)}^{\text{ax}}}{Q(x) \vdash A \vee Q(x)}^{\vee_d^2}}{Q(x) \vdash \exists x(A \vee Q(x))}^{\exists_d}}{A \vdash \exists x(A \vee Q(x))}^{\exists_d} \quad \frac{Q(x) \vdash \exists x(A \vee Q(x))}{\exists x Q(x) \vdash \exists x(A \vee Q(x))}^{\exists_g}}{A \vee \exists x Q(x) \vdash \exists x(A \vee Q(x))}^{\vee_g}$$

Exercice 3 (8 pts)

1- Toute règle de coupure est-elle une règle mix ?

Oui : une coupure est un mix où les entiers n et m valent tous les deux 1.

2- Toute règle mix est-elle une règle de coupure ?

Non : dès que $n = 2$, par exemple, le mix n'est pas une coupure.

3-

3.1 Considérons le mix de la première preuve. Son *degré* est la taille de la formule qui est simplifiée par le mix, ici $|A|$.

Sa *hauteur* est la somme des tailles (i.e. le nombre de noeuds) des deux preuves qui ont pour conclusions les deux séquents du haut du mix :

- $|\pi_{1,1}| + |\pi_{1,2}| + 1$ pour la preuve de gauche

- $|\pi_2|$ pour celle de droite

Le *rang* du mix est donc

$$(|A|, |\pi_{1,1}| + |\pi_{1,2}| + |\pi_2| + 1).$$

3.2 Que valent les rangs de chacun des deux mix de la seconde preuve ?

Le rang du mix de gauche de la seconde preuve vaut $(|A|, |\pi_{1,1}| + |\pi_2|)$.

Le rang du mix de droite de la seconde preuve vaut $(|A|, |\pi_{1,2}| + |\pi_2|)$.

3.3 Leur degré est identique à celui du mix de la première preuve, mais leur hauteur est *strictement* inférieure à $|\pi_{1,1}| + |\pi_{1,2}| + |\pi_2| + 1$. Donc ces rangs sont *strictement* inférieurs à $(|A|, |\pi_{1,1}| + |\pi_{1,2}| + |\pi_2| + 1)$.

4- On considère une preuve π de la forme

$$\frac{\frac{\frac{\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2}}{\vdots \quad \vdots} \quad \pi_2}{\Gamma, B \vdash \Delta \quad \Gamma, C \vdash \Delta}^{\vee_g} \quad \vdots}{\Gamma, B \vee C \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \Delta'}^{\text{R2}}}{\Gamma, \Gamma'_A, B \vee C \vdash \Delta_A, \Delta'}^{\text{mix}}$$

où $\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \pi_2$ sont des preuves normales.

Voici une preuve $\hat{\pi}'$, qui a la même conclusion que π et dont les mix ont pour rang $(|A|, |\pi_{1,1}| +$

$|\pi_2|$), $(|A|, |\pi_{1,2}| + |\pi_2|)$, qui sont strictement inférieurs à $(|A|, |\pi_{1,1}| + |\pi_{1,2}| + |\pi_2| + 1)$.

$$\begin{array}{c}
\pi_{1,1} \quad \pi_2 \quad \pi_{1,2} \quad \pi_2 \\
\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\hline
\Gamma, B \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \Delta' \quad \Gamma, C \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \Delta' \\
\hline
\Gamma, \Gamma'_A, B \vdash \Delta_A, \Delta' \quad \Gamma, \Gamma'_A, C \vdash \Delta_A, \Delta' \\
\hline
\Gamma, \Gamma'_A, B \vee C \vdash \Delta_A, \Delta'
\end{array}$$

Par élimination de ces mix plus petits, on peut obtenir une preuve *normale* $\hat{\pi}$ qui a la même conclusion que π .