

LOGIQUE

Corrigé du contrôle continu du 30 Novembre 2009

Exercice 1(sur 4 points)

1- Voici des preuves dans LK :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{A, B \vdash A}^{\text{ax}'}}{A, B \vdash A \wedge B}^{\wedge_d}}{A, B, \neg(A \wedge B) \vdash}^{\neg_g}}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A, \neg B}^{\neg_d}}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}^{\vee_d}}{\quad} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\overline{A, B \vdash A, B}^{\text{ax}'}}{A \wedge B \vdash A, B}^{\wedge_g}}{\vdash \neg(A \wedge B), A, B}^{\neg_d}}{\neg A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)}^{\neg_g}}{\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)}^{\vee_g}}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{P(x) \vdash P(x)}^{\text{ax}}}{\vdash P(x), \neg P(x)}^{\neg_d}}{\vdash P(x) \vee \neg P(x)}^{\vee_d}}{\vdash \forall x(P(x) \vee \neg P(x))}^{\forall_d}}{\neg(\forall x(P(x) \vee \neg P(x))) \vdash}^{\neg_g}}{\vdash \neg \neg(\forall x(P(x) \vee \neg P(x)))}^{\neg_d}} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\overline{P(x) \vdash P(x)}^{\text{ax}}}{P(x) \vdash \exists x P(x)}^{\exists_d}}{P(x), \neg \exists x P(x) \vdash}^{\neg_g}}{\neg \exists x P(x) \vdash \neg P(x)}^{\neg_d}}{\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)}^{\forall_d}}{\vdash (\neg \exists x P(x)) \rightarrow (\forall x \neg P(x))}^{\rightarrow_d}}$$

2- La quatrième preuve est aussi une preuve dans LJ.

Exercice 2(sur 3 points)

1- La propriété $\models \neg(A \vee \neg A)$ n'est pas vraie : dans la structure booléenne définie par $\nu(A) = 1$ la valeur de $\neg(A \vee \neg A)$ est 0. Donc, par la propriété d'adéquation du système LK, le séquent $\vdash \neg(A \vee \neg A)$ n'est pas prouvable.

2- Cosinus a commis deux erreurs :

2.1 : on ne peut passer du séquent $\perp \vdash$ au séquent $A \vdash$ par aucune suite finie de règles de LK, en particulier pas au moyen d'une suite finie d'affaiblissements ;

2.2 on ne peut passer du séquent $A \vdash A$ au séquent $\vdash A$ par aucune règle de LK, en particulier pas au moyen d'une contraction gauche ;

Exercice 3(sur 3 points)

1-2 Supposons que π est une preuve dans LK de $\Gamma \vdash A \vee B$. On obtient alors la preuve π' suivante de $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow B$.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{\quad}^{\text{ax}}}{A \vdash A}^{\neg_g}}{A, \neg A \vdash}^{\text{aff}_d}}{\frac{\pi \quad \frac{\frac{\overline{A, \neg A \vdash B} \quad \overline{B, \neg A \vdash B}^{\text{ax}'}}{\quad}^{\vee_g}}{\vdash A \vee B, \neg A \vdash B}^{\rightarrow_d}}{\Gamma \vdash A \vee B \quad A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B}^{\text{coupure}}}}{\Gamma \vdash \neg A \rightarrow B}$$

3- La preuve π' ci-dessus contient une coupure. D'après le théorème d'élimination des coupures, on peut construire, à partir de π' , une preuve π'' , dans LK, du même séquent $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow B$, qui ne comporte aucune coupure.

Exercice 4(sur 10 points)

1- L'image de A par l'application $S_{\mathcal{A}}$ est $\{1, 2\}$. Donc A1 est vérifié par \mathcal{A} .

Par la même remarque, chaque élément de A différent de 0 est bien dans $\text{Im}(S_{\mathcal{A}})$, donc A2 est vérifiée par \mathcal{A} .

La première ligne (resp. colonne) du tableau définissant $+_{\mathcal{A}}$ correspond à l'identité, donc A4 est vérifiée par \mathcal{A} . On peut vérifier A5 pour chaque couple (x, y) (9 vérifications). On peut aussi remarquer que la table de $+_{\mathcal{A}}$ est celle du monoïde quotient de $(\mathbb{N}, +)$ par la congruence (de monoïdes) définie par : $u \equiv v$ si et seulement si $[(u = v = 0)$ ou $(u \geq 1, v \geq 1$ et $2|(u - v))]$. La loi $+_{\mathcal{A}}$ est donc associative. L'application $S_{\mathcal{A}}$ coïncide avec $x \mapsto x + 1$ dans ce monoïde. L'axiome A5 affirme que : $x + (y + 1) = (x + y) + 1$, ce qui découle de l'associativité de $+_{\mathcal{A}}$.

2- La seule interprétation possible est

$\times_{\mathcal{A}}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

3- Comme $S_{\mathcal{A}}(0) = S_{\mathcal{A}}(2)$ alors que $0 \neq 2$, A3 n'est pas vrai dans cette structure.

4- D'après le théorème d'adéquation, tout séquent prouvable est vrai dans toute structure. Or $\mathcal{A} \models \text{EG} \wedge \text{A1} \wedge \text{A2} \wedge \text{A4} \wedge \text{A5} \wedge \text{A6} \wedge \text{A7}$, mais $\mathcal{A} \not\models \text{A3}$. Donc $\text{EG}, \text{A1}, \text{A2}, \text{A4}, \text{A5}, \text{A6}, \text{A7} \vdash \text{A3}$ n'est pas vrai dans \mathcal{A} et, a fortiori, n'est pas prouvable dans LK.

5- Dans la structure usuelle $\mathcal{N} := \langle \mathbb{N}, +, S \rangle$, tous les axiomes de **P0** sont vrais. Donc $\mathcal{N} \models \text{EG} \wedge \text{A1} \wedge \text{A2} \wedge \text{A4} \wedge \text{A5} \wedge \text{A6} \wedge \text{A7}$, mais $\mathcal{N} \not\models \neg \text{A3}$. Donc $\text{EG}, \text{A1}, \text{A2}, \text{A4}, \text{A5}, \text{A6}, \text{A7} \vdash \neg \text{A3}$ n'est pas prouvable dans LK.