

## LOGIQUE

Sujet de contrôle continu- 29 Novembre 2010

**Durée : 1H 30**

**Documents autorisés** : notes de cours, feuilles et notes de TD.

**Indications** : Les 3 exercices sont indépendants. Dans chaque exercice, on peut *admettre* le résultat de certaines questions (en le mentionnant clairement sur la copie), puis *utiliser* ce résultat dans la suite de l'exercice.

**Exercice 1**(sur 4 points)

1- Donner des preuves dans LK des séquents :

$$\vdash (((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (\neg P \vee Q)) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$\vdash (\forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y))) \rightarrow ((\forall x P(x)) \rightarrow (\exists y Q(y)))$$

2- Donner une preuve dans LJ du séquent :

$$\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee R))$$

**Exercice 2**(sur 8 points)

1- Montrer que

$$\neg(A \wedge B) \vdash_{LK} \neg A \vee \neg B$$

On cherche maintenant à démontrer, par une méthode syntaxique, que ce séquent n'est pas prouvable dans LJ.

2- On rappelle que, pour tout entier  $p$  et formule  $\Phi$ ,  $p\Phi$  désigne le multi-ensemble constitué de  $p$  fois la formule  $\Phi$ .

Montrer que, pour tous entiers  $p, q \in \mathbb{N}$ , aucun des trois séquents ci-dessous n'est prouvable dans LJ :

$$p\neg(A \wedge B), qA \vdash \quad p\neg(A \wedge B), qA \vdash B \quad p\neg(A \wedge B), qA \vdash A \wedge B$$

Aide : considérer la plus petite preuve sans coupure d'un séquent de l'une des ces trois formes.

3- Montrer que, pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$  :

$$p\neg(A \wedge B) \not\vdash_{LJ} \neg A$$

4- Montrer que :

$$\neg(A \wedge B) \not\vdash_{LJ} \neg A \vee \neg B$$

**Exercice 3**(sur 20 points)

On considère dans cet exercice la signature  $\mathcal{S}$  formée du symbole de prédicat  $=$  (symbole de l'égalité, d'arité 2) d'un symbole de fonction  $*$  (symbole d'opération binaire, d'arité 2) et d'un symbole de constante  $e$  (d'arité 0). On rappelle les théories (i.e. ensembles de formules) suivantes :

**EG** (Théorie de l'égalité)

**REF** :  $\forall x \ x = x$

**SYM** :  $\forall x \forall y \ (x = y \rightarrow y = x)$

**TRANS** :  $\forall x \forall y \forall z \ (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$

**COMPF** :  $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 \ (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2) \rightarrow x_1 * x_2 = y_1 * y_2$

**MO** (Théorie des monoïdes)

Tous les axiomes ci-dessus de EG ;

**ASS** :  $\forall x \forall y \forall z \ x * (y * z) = (x * y) * z$

**NE** :  $\forall x \ (x * e = x \wedge e * x = x)$

1- Montrer que la règle suivante est une règle dérivée de LK :

$$\frac{\Gamma, A \vdash D \quad \Gamma, B \vdash D \quad \Gamma, C \vdash D}{\Gamma, A \vee B \vee C \vdash D} \vee\vee_g$$

2- Montrer que les quatre règles suivantes sont des règles dérivées de LK :

$$\frac{}{\Gamma, EG \vdash x = x} REF \quad \frac{\Gamma, EG \vdash x = y}{\Gamma, EG \vdash y = x} SYM \quad \frac{\Gamma, EG \vdash x = y \quad \Gamma, EG \vdash y = z}{\Gamma, EG \vdash x = z} TRANS$$

$$\frac{\Gamma, EG \vdash x_1 = y_1 \quad \Gamma, EG \vdash x_2 = y_2}{\Gamma, EG \vdash x_1 * x_2 = y_1 * y_2} COMP$$

3- Montrer que, pour tout terme  $t$ , les deux règles suivantes sont des règles dérivées de LK.

$$\frac{}{\text{MO} \vdash t * e = t} ND \quad \frac{}{\text{MO} \vdash e * t = t} NG$$

On ajoute à **MO** l'axiome suivant **CAR2** :  $\forall x, y, z \ x = y \vee x = z \vee y = z$

qui exprime que le cardinal du monoïde est inférieur ou égal à 2. On note **MO2** l'ensemble de formules ainsi obtenu.

4- Donner une preuve dans LK, augmenté des règles dérivées des questions 1,2,3, du séquent :  $\text{MO2} \vdash e = x \vee e = x * x \vee x = x * x$

5- Donner une preuve dans LK, augmenté des règles dérivées des questions 1,2,3, des séquents suivants :

$\text{MO2} \vdash e = x * x \rightarrow x = x * (x * x)$

$\text{MO2} \vdash x = x * x \rightarrow x = x * (x * x)$

$\text{MO2} \vdash e = x \rightarrow x = x * (x * x)$

6- Montrer que :

$$\text{MO2} \vdash \forall x \ x = x * (x * x)$$

7- Pouvez-vous construire une structure  $\mathcal{A}$  qui interprète la signature  $\mathcal{S}$  et telle que

$$\mathcal{A} \models \text{MO2} \text{ et } \mathcal{A} \models \forall x \ e = x * x$$

8- Pouvez-vous construire une structure  $\mathcal{A}$  qui interprète la signature  $\mathcal{S}$  et telle que

$$\mathcal{A} \models \text{MO2} \text{ et } \mathcal{A} \models \neg \forall x \ e = x * x$$

9- Le séquent

$$\text{MO2} \vdash \forall x \ e = x * x$$

est-il prouvable dans LK ?

Aide : On donnera un argument sémantique.