

## Jeux, Synthèse et Contrôle

### Logique Monadique du Second-Ordre

#### Exercice 6.1 Théorie de $(\mathbb{Q}, \leq)$

Un ordre  $\leq$  sur un ensemble  $E$  est dit *dense* ssi

$$\forall x, z \in E, x < z \Rightarrow (\exists y \in E, x < y < z)$$

- 1- L'ordre naturel sur  $\mathbb{N}$  (resp.  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ) est-il dense ?
- 2- Montrer que tout ensemble ordonné  $(E, \leq)$  dénombrable, dense, sans plus petit élément et sans plus grand élément, est isomorphe à  $(\mathbb{Q}, \leq)$ .

On pose  $E := \{a, c\}^*b$  et pour tous  $u, v \in E$ ,  $u \preceq v$  ssi  $u$  est lexicographiquement plus petit que  $v$  pour l'ordre  $a < b < c$ . Montrer que  $(E, \preceq)$  est un ordre dénombrable dense.

- 3- Montrer que la logique monadique du second ordre de la structure  $(\mathbb{Q}, \leq)$  est décidable.  
Aide : On exprimera le prédicat  $u \preceq v$  par une formule MSO, à deux variables libres, sur la signature  $\langle S_a, S_b, S_c \rangle$ .

#### Exercice 6.2 Théories des ordres dénombrables

- 1- Montrer que tout ensemble ordonné  $(E, \leq)$  dénombrable est *plongeable* dans  $(\mathbb{Q}, \leq)$  i.e. il existe une application strictement croissante  $f : E \rightarrow \mathbb{Q}$ .

- 2- On considère la signature  $\langle \leq \rangle$  (i.e. un seul symbole de prédicat, qui est binaire).

- 2.1 Montrer que le problème suivant est décidable :

*donnée* : une formule MSO  $\Phi$  sur la signature  $\langle \leq \rangle$

*question* : cette formule est-elle vraie dans tout ensemble ordonné dénombrable  $(E, \leq)$  ?

- 2.2 Montrer que le problème suivant est décidable :

*donnée* : une formule MSO  $\Phi$  sur la signature  $\langle \leq \rangle$

*question* : existe-t-il un ensemble ordonné dénombrable  $(E, \leq)$  dans lequel cette formule est vraie ?

#### Exercice 6.3 Langages rationnels vs langages définissables

Soit  $A$  un alphabet fini. On considère dans cet exercice la structure

$$\langle A^*, (S_a)_{a \in A} \rangle.$$

Une partie  $L \subseteq A^*$  est dite *définissable* (en MSO) ssi, il existe une formule MSO  $\Phi(X)$ , à une seule variable libre  $X$ , telle que

(i)  $L$  est un modèle de  $\Phi$  (i.e.  $A^*, \nu_L \models \Phi(X)$ , où  $\nu_L$  est la valuation qui envoie la variable  $X$  sur l'ensemble  $L$ )

(ii) si  $L' \subseteq A^*$  est un modèle de  $\Phi$ , alors  $L = L'$ .

- 1- Montrer que tout langage  $L$  définissable en MSO est rationnel.

Aide : utiliser le fait que, tout automate alternant est équivalent à un automate non-déterministe, puis le fait que, dans un jeu de parité, le gagnant a une stratégie gagnante qui est *sans-mémoire*.

- 2- Montrer que tout langage  $L$  rationnel est définissable en MSO.

**Exercice 6.4** Réécriture linéaire droite

Soit  $A$  un alphabet fini. On considère dans cet exercice la structure

$$\langle A^*, (S_a)_{a \in A} \rangle$$

Soit  $S$ , une partie finie de  $A^* \times A^*$ . On dit que  $S$  est système de *réécriture* fini. La relation de *réduction linéaire droite* immédiate, notée  $\overrightarrow{\text{id}_S}$  est définie par :

pour tous  $f, g \in X^*$ ,  $f \overrightarrow{\text{id}_S} g$  ssi il existe  $(u, v) \in S$  et  $\alpha \in X^*$  tels que  $f = \alpha u$  et  $g = \alpha v$ .

La relation de réduction linéaire droite, notée  $\overrightarrow{\text{id}_S}^*$ , est la clôture réflexive et transitive de la relation  $\overrightarrow{\text{id}_S}$ .

1- Montrer qu'il existe une formule MSO  $\text{RI}(x, y)$  à deux variables libres  $x, y$ , qui exprime que  $x \overrightarrow{\text{id}_S} y$ .

2- Montrer qu'il existe une formule MSO  $\text{R}(x, y)$  à deux variables libres  $x, y$ , qui exprime que  $x \overrightarrow{\text{id}_S}^* y$ .

3- Montrer que, pour tout ensemble rationnel de mots  $L \subseteq A^*$ , l'ensemble des descendants de  $L$  pour la relation  $\overrightarrow{\text{id}_S}^*$

$$\Delta_S^*(L) := \{v \in A^* \mid \exists u \in L, u \overrightarrow{\text{id}_S}^* v\}$$

est *rationnel*.

Une relation binaire  $\rightarrow$  sur un ensemble  $E$  est dite :

- *noethérienne* ssi, pour toute suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $e_n \rightarrow e_{n+1}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $e_n = e_{n+1}$ .

- *sans-boucle* ssi, il n'existe pas de  $e \in E$  tel que  $e \rightarrow^+ e$ .

4- Montrer que le problème suivant est décidable :

*donnée* : une partie finie de  $S$  de  $A^* \times A^*$ .

*question* : la relation  $\overrightarrow{\text{id}_S}$  est-elle sans-boucle ?

*donnée* : une partie finie de  $S$  de  $A^* \times A^*$ .

*question* : la relation  $\overrightarrow{\text{id}_S}$  est-elle noethérienne ?

**Exercice 6.5** Langages rationnels

Soit  $A$  un alphabet fini et  $u_1, u_2, v_1, v_2$  quatre mots de  $A^*$ . On considère l'application  $F : \mathcal{P}(A^*) \rightarrow \mathcal{P}(A^*)$  définie par :

$$F(L) := ((Lu_1^{-1} \cup Lu_2^{-1}) \cdot v_1) \cap ((Lu_1^{-1} \cup Lu_2^{-1}) \cdot v_2).$$

On pose

$$F^*(L) := \bigcup_{n \geq 0} F^n(L)$$

où  $F^0 := \text{Id}$ ,  $F^{n+1} = F \circ F^n$ .

Montrer que, si  $L$  est un langage rationnel, alors  $F^*(L)$  est rationnel.