

Théorie des Jeux

Jeux de parité

Exercice 4.1 Jeu de parité

On choisit comme arène le *graphe* de la figure 1, et la partition $V_0 = \{v_0, v_2, v_5, v_6\}$, $V_1 =$

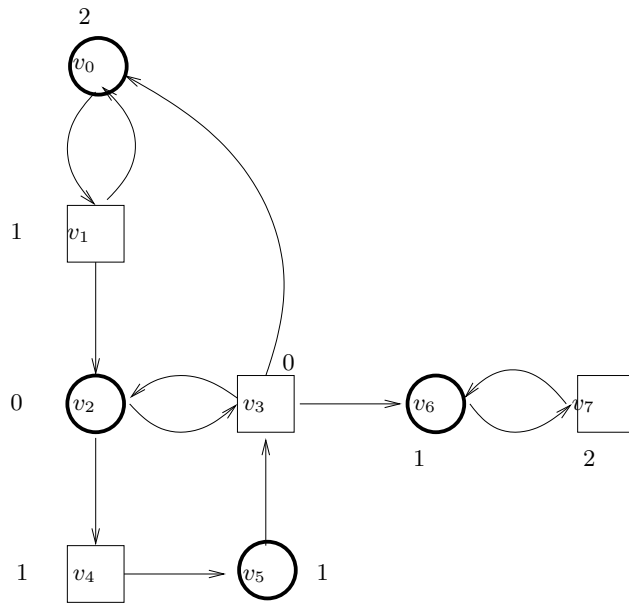


FIGURE 1 – Le graphe \mathcal{G} .

$\{v_1, v_3, v_4, v_7\}$. On se donne un *coloriage* des sommets $\chi : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ (indiqué sur la figure). La partie π est gagnée par J0 ssi

$$\max\{c \in \{0, 1, 2\} \mid \pi \text{ passe infiniment souvent par la couleur } c\} \equiv 0 \pmod{2}$$

sinon, elle est gagnée par J1.

- 1- On fixe $r := v_0$. Quel joueur a une stratégie gagnante ?
- 2- Donner pour ce joueur une stratégie gagnante *sans mémoire*.

Exercice 4.2 Points fixes

Soit $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ une application croissante.

- 1- Montrer qu'il existe un plus petit sous-point fixe de f i.e. un plus petit $x \in \mathcal{P}(V)$ tel que

$$x \geq f(x).$$

- 2- Soit x_0 le plus petit sous-point fixe de f . Montrer que

$$f(x_0) = x_0$$

3- Montrer que x_0 est le plus petit point fixe de f .
 Par le théorème de Zermelo, l'ensemble $E := 2^{2^{\text{Card}(V)}}$ admet un bon-ordre \leq_E (nous omettrons l'indice E lorsque le contexte le permet).

Pour tout $e \in E$, si e n'est pas le maximum de (E, \leq_E) , on note

$$e + 1 := \min\{e \in E \mid e_0 < e\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{P}(V)$ et tout $e \in E$, on définit $f^e(x)$ comme suit :

- si $\exists e' \in E, e = e' + 1$ alors

$$f^e(x) = f(f^{e'}(x))$$

- sinon

$$f^e(x) = \bigcup_{e' < e} f^{e'}(x)$$

4- Montrer que la suite $(f^e(\emptyset))_{e \in E}$ est croissante.

Indication :

- prouver, par induction bien-fondée sur α que $f^\alpha(\emptyset) \subseteq f^{\alpha+1}(\emptyset)$

- prouver, par induction bien-fondée sur β que, $\alpha \leq \beta \Rightarrow f^\alpha(\emptyset) \subseteq f^\beta(\emptyset)$.

5- Montrer qu'il existe un plus petit $e_0 \in E$ tel que

$$f^{e_0}(\emptyset) = f^{e_0+1}(\emptyset)$$

On pose $x_0 := f^{e_0}(\emptyset)$.

6- Montrer que x_0 est le plus petit point fixe de f .

Exercice 4.3 Dualité

Soit $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ une application croissante. On note $x \mapsto \bar{x}$ l'application "complément" i.e. $\bar{x} := V \setminus x$.

Définissons l'application *duale* de f comme $g : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ telle que :

$$g(x) = \overline{f(\bar{x})}$$

1- Montrer que g est croissante.

2- Montrer que si x_0 est le plus petit point fixe de f , alors \bar{x}_0 est le plus grand point fixe de g .

3- Montrer que si x_1 est le plus grand point fixe de f , alors \bar{x}_1 est le plus petit point fixe de g .

Exercice 4.4 Attracteurs et jeu d'accessibilité

Soit $\mathcal{G} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$ un jeu sur un graphe orienté. Pour tout numéro de joueur $\sigma \in \{0, 1\}$, on définit l'application $\mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$:

$$pre_\sigma(\mathcal{G}, Y) := \{v \in V_\sigma \mid vE \cap Y \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{\bar{\sigma}} \mid vE \subseteq Y\}.$$

1- Vérifier que cette application est croissante (pour l'inclusion)

2- Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{P}(V)$, il existe un plus petit ensemble U tel que

$$Y \subseteq U \text{ et } pre_\sigma(\mathcal{G}, U) \subseteq U.$$

On note cet ensemble $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ (l'*attracteur* de Y pour le joueur σ).

3- Montrer que $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ est le plus petit point fixe de l'application

$$f : X \mapsto Y \cup pre_\sigma(X)$$

4- En utilisant la q.6 de l'exercice 4.2, écrire une expression de $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ à partir des applications itérées de f sur le point initial \emptyset .

5- On définit l'ensemble W comme :

$$W := \{\pi \mid \pi \text{ visite l'ensemble } A\}.$$

5.1 Donner une stratégie sans-mémoire du joueur σ qui est gagnante sur $Attr_\sigma(\mathcal{G}, A)$.

5.2 Montrer que $Attr_\sigma(\mathcal{G}, A)$ est l'ensemble des positions gagnantes de σ .

Exercice 4.5 Attracteurs et pièges

Soit $\mathcal{G} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$ un jeu sur un graphe orienté. On dit qu'une partie $Y \in \mathcal{P}(V)$ est :

- un σ -attracteur ssi

$$Y \supseteq pre_\sigma(Y)$$

- est un σ -piège ssi

$$Y \subseteq pre_{\bar{\sigma}}(Y)$$

1- Montrer que toute intersection de σ -attracteurs est un σ -attracteur.

2- Montrer que toute union de σ -pièges est un σ -piège.

3- Montrer que les applications $X \mapsto pre_\sigma(\mathcal{G}, X)$ et $X \mapsto pre_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, X)$ sont duales (l'une de l'autre).

4- Montrer que, pour tout $Y \in \mathcal{P}(V)$, Y est un σ -attracteur ssi $V \setminus Y$ est un σ -piège.

5- Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{P}(V)$, il existe un plus grand σ -piège inclus dans Y ; on note cet ensemble $Piege_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ (le piège de Y pour le joueur σ).

6- Montrer que

$$V \setminus Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y) = Piege_\sigma(\mathcal{G}, V \setminus Y).$$

7- Montrer que, si Y est un σ -piège, alors $Attr_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, Y)$ est un σ -piège.

Aide : montrer que, dans ce cas, $Attr_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, Y)$ est obtenu par itération de $pre_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, *)$ à partir de Y .