

Option Jeux

DM- à rendre le 13/04/16

Exercice 1 (10 pts) Jeu de Poker

On étudie une version (très) simplifiée du Poker : deux joueurs A et B s'affrontent. Le jeu de cartes ne comporte que 3 cartes 1, 2, 3. A reçoit une carte, B reçoit une carte, la troisième carte reste cachée. L'arbre du jeu est représenté sur la figure 1. Les nombres indiqués sont les gains de J1 (J2 gagne l'opposé de J1 i.e. à chaque partie, la somme des gains de J1 et J2 est nulle). Un hasard externe produit la "donne" A_i/B_j : A reçoit la carte i et B la carte j ; ces 6

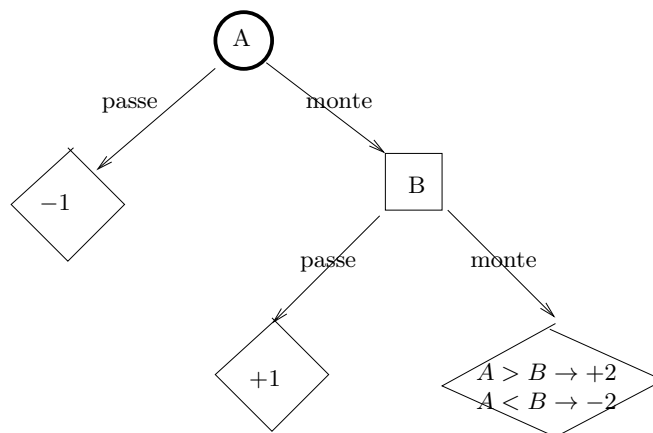


FIGURE 1 – Le poker à 3 cartes.

donnes sont équiprobables.

On analyse les stratégies possibles de A et B.

1- Montrer que les seuls comportements raisonnables de A,B consistent :

- si A_3/B_j : A monte
- si A_i/B_1 : B passe
- si A_i/B_3 : B monte
- si A_2/B_j : A monte (comparer les espérances de A selon qu'il passe ou qu'il monte).

2- Dans le cas A_1/B_j , A décide de monter (avec proba p) ou de passer (proba $1 - p$). Dans le cas A_i/B_2 , B décide de monter (avec proba q) ou de passer (proba $1 - q$).

On appelle σ_p (resp. τ_q) ces stratégies de A (resp. B).

Calculer le gain moyen $r(\sigma_p, \tau_q)$ de A, lorsque A joue σ_p et B joue τ_q .

3- Montrer que ce jeu "a une valeur" i.e. qu'il existe un nombre $v \in \mathbb{R}$ tel que

$$v = \max_{p \in [0,1]} \{ \min_{q \in [0,1]} \{ r(\sigma_p, \tau_q) \} \} = \min_{q \in [0,1]} \{ \max_{p \in [0,1]} \{ r(\sigma_p, \tau_q) \} \}.$$

Calculer v . Pour quelles valeurs (\bar{p}, \bar{q}) a-t-on $r(\sigma_{\bar{p}}, \tau_{\bar{q}}) = v$?

4- Montrer que (\bar{p}, \bar{q}) est un "équilibre de Nash".

5- Montrer que, si A joue une stratégie $\sigma_p \neq \sigma_{\bar{p}}$, alors B possède une stratégie τ_q telle que $r(\sigma_p, \tau_q) < v$.

6- Montrer que, si B joue une stratégie $\tau_q \neq \tau_{\bar{q}}$, alors A possède une stratégie σ_p telle que $r(\sigma_p, \tau_q) > v$.

Exercice 2 (10 pts) Équilibres de Nash

On considère le jeu matriciel Γ , nommé “dilemme du prisonnier” :

	T	C
T	(1, 1)	(3, 0)
C	(0, 3)	(2, 2)

On rappelle que T évoque “trahir” et C évoque “coopérer”.

1- Ce jeu a-t-il un (ou plusieurs) équilibre de Nash en stratégies pures ?

Le but de l'exercice est de montrer que, en *itérant* ce jeu matriciel, on obtient un jeu où des comportements de *coopération* peuvent être des équilibres de Nash. Le phénomène nouveau est que, si le joueur 1 (resp. 2) trahit, il s'expose à une *punition* du joueur 2 (resp. 1) dans la suite du jeu.

Le jeu itéré Γ^δ (où δ est un nombre réel $\delta \in]0, 1[$) est défini comme suit :

- on note $S_1 = S_2 = \{T, C\}$
- pour tous $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$, on note $r_i(s_1, s_2)$ le gain du joueur i sur la partie (s_1, s_2) dans le jeu Γ
- une partie de Γ^δ est un mot infini $h = h^1 \dots h^t \dots \in (S_1 \times S_2)^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$
- au t -ième tour du jeu, J1 (resp. J2), connaissant l'histoire $h^1 \dots h^{t-1}$ (qui est le mot vide si $t = 1$), choisit un “ coup ” $h_1^t \in S_1$ (resp. $h_2^t \in S_2$)
- le gain du joueur i ($i \in \{1, 2\}$) sur la partie h est défini par

$$R_i(h) := (1 - \delta) \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot r_i(h_1^t, h_2^t) \quad (1)$$

i.e. le gain du joueur i est la moyenne de ses gains, dans le jeu Γ , aux tours $1, 2, \dots, t, \dots$ pondérés par les coefficients $\delta^0, \delta^1, \dots, \delta^{t-1}, \dots$

- une *stratégie* (pure) du joueur i est une application $\sigma_i : \bigcup_{t \geq 1} (S_1 \times S_2)^{t-1} \rightarrow S_i$
- la partie $h(\sigma_1, \sigma_2)$ associée au couple de stratégies (σ_1, σ_2) est la seule suite $h \in (S_1 \times S_2)^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$ telle que, pour tout entier $t \in [1, \infty[$:

$$h^t = (\sigma_1(h^1, \dots, h^{t-1}), \sigma_2(h^1, \dots, h^{t-1})).$$

- on note $R_i(\sigma_1, \sigma_2)$ le gain du joueur i avec le couple de stratégies (σ_1, σ_2) ; il s'agit de son gain sur la partie $h(\sigma_1, \sigma_2)$ (au sens de la formule (1)).

Exemple : pour les parties

$$h := (C, T)(T, C)(C, T)(T, C) \dots, \quad h' := (C, T)(C, C)(C, T)(C, C) \dots$$

i.e. plus formellement, $h := ((C, T)(T, C))^\omega$, $h' := ((C, T)(C, C))^\omega$, on a les gains suivants :

$$R_1(h) = (1 - \delta)(0 + 3\delta + 0 + 3\delta^3 + \dots) = 3(1 - \delta)\delta \frac{1}{1 - \delta^2} = \frac{3\delta}{1 + \delta},$$

$$R_2(h) = (1 - \delta)(3 + 0 + 3\delta^2 + \dots) = (1 - \delta) \frac{3}{1 - \delta^2} = \frac{3}{1 + \delta},$$

$$R_1(h') = (1 - \delta)(0 + 2\delta + 0 + 2\delta^3 + \dots) = \frac{2\delta}{1 + \delta},$$

2- Calculer $R_2(h')$.

Trahir Toujours

Notons TT la stratégie du joueur J1 (resp. J2) définie par : pour toute histoire $(h^1 \dots h^{t-1}) \in (S_1 \times S_2)^{t-1}$:

$$\text{TT}(h^1 \dots h^{t-1}) = T.$$

3- Montrer que $R_1(\text{TT}, \text{TT}) = 1$.

4- Montrer que, pour toute stratégie σ_1 du joueur J1, $R_1(\sigma_1, \text{TT}) \leq 1$.

5- Montrer que, pour tout $\delta \in]0, 1[$, (TT, TT) est un équilibre de Nash du jeu Γ^δ .

Punir Éternellement

Notons PE la stratégie du joueur Ji définie par : pour toute histoire $h^1 \dots h^{t-1} \in (S_1 \times S_2)^{t-1}$:

$$\text{PE}(h^1 \dots h^{t-1}) = T \text{ si } \exists t_0 \in [1, t-1], h_{3-i}^{t_0} = T, \text{ PE}(h^1 \dots h^{t-1}) = C \text{ sinon}$$

i.e. Ji coopère tant que son partenaire coopère, et trahit éternellement, dès que son partenaire a trahi au moins une fois.

6- Montrer que $R_1(\text{PE}, \text{PE}) = 2$.

7- Soit $t_0 \in [1, \infty[$. Soit h est une partie où J1 coopère aux tours $t \in [1, t_0 - 1]$ et trahit aux tours $t \in [t_0, \infty[$, alors que J2 joue la stratégie PE. Montrer que

$$R_1(h) = 2 + \delta^{t_0-1}(1 - 2\delta).$$

8- Pour quelles valeurs de δ le couple (PE, PE) est-il un équilibre de Nash du jeu Γ^δ ?

On dit que (σ_1, σ_2) est un équilibre de Nash *uniforme* de la famille de jeux $(\Gamma^\delta)_{\delta \in]0, 1[}$ si,

$$\exists \delta_0 \in [0, 1[, \forall \delta \in]\delta_0, 1[, (\sigma_1, \sigma_2) \text{ est un équilibre de Nash de } \Gamma^\delta.$$

9- Montrer que (PE, PE) est un équilibre de Nash uniforme de la famille $(\Gamma^\delta)_{\delta \in]0, 1[}$.

Punir et Pardonner

Notons PP_k (où k est un entier non nul), la stratégie du joueur Ji définie par :

$$\begin{aligned} \text{PP}_k(h^1 \dots h^{t-1}) &= T \text{ si } \exists t_0 \in [t-k, t-1], [(t_0 = 1 \text{ ou } h^{t_0-1} = (C, C)) \text{ et } h^{t_0} \neq (C, C)], \\ \text{PP}_k(h^1, \dots, h^{t-1}) &= C \text{ sinon} \end{aligned}$$

i.e. Ji coopère tant que son partenaire coopère, et trahit pendant k coups, dès que son partenaire (ou lui-même) a trahi, puis redevient coopératif.

10- Soit $\delta \in]0, 1[$. Montrer que, $(\text{PP}_1, \text{PP}_1)$ n'est pas un équilibre de Nash de Γ^δ .

11- Soit h est une partie où J2 joue la stratégie PP_k et J1 joue la stratégie PP_k à tous les tours d'ordre $t \neq t_0$ mais trahit au coup $t_0 \in [1, \infty[$.

11.1 Vérifier que

$$h = (C, C)^{t_0-1} \cdot (T, C) \cdot (T, T)^k \cdot (C, C)^\omega$$

11.2 Montrer que

$$R_1(h) = 2 + (1 - \delta)\delta^{t_0-1}(1 - \delta - \delta^2 - \dots - \delta^k).$$

12- On note φ la racine réelle positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Soit $\delta \in]\varphi, 1[$.

12.1 Soit h une partie où J2 joue la stratégie PP_2 (à tous les tours), et J1 joue la stratégie PP_2 à tous les tours d'ordre $t \leq t_0 - 1$ mais trahit au tour $t_0 \in [1, \infty[$. Montrer que

$$R_1(h) \leq 2 + (1 - \delta)\delta^{t_0-1}(1 - \delta - \delta^2).$$

12.2 Montrer que (PP_2, PP_2) est un équilibre de Nash de Γ^δ .

13- Le couple de stratégies (PP_2, PP_2) est-il un équilibre de Nash uniforme de la famille $(\Gamma^\delta)_{\delta \in]0,1[}$?

14- Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est-il vrai que (PP_k, PP_k) est un équilibre de Nash uniforme de la famille $(\Gamma^\delta)_{\delta \in]0,1[}$?