INFORMATIQUE THÉORIQUE 2

Feuille 5 : Logique MSO

Logique MSO sur les mots

Exo 1

Donner des formules MSO ϕ_L pour chacun des langages réguliers L suivants :

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ est divisible par } 3\}$
2. $L_2 \subseteq \{a,b\}^*$ contient tous les mots w tels que dans chaque préfixe v de w, la différence $|w|_a - |w|_b$ est 0, 1 ou 2.
3. $L_3 \subseteq \{a,b\}^*$ contient tous les mots w qui n'ont pas de facteur aab.
4. $L_4 \subseteq \{a,b\}^*$ contient tous les mots w qui n'ont pas de sous-mot aab.
5. $L_5 \subseteq \{a,b\}^*$ contient tous les mots w qui ont un nombre pair de facteurs $abba$.

Exo 2 Montrer que tout langage rationnel sur un alphabet Σ est définissable dans MSO par induction structurelle sur une expression rationnelle définissant le langage. Étant donnée une expression rationnelle E, on pourra construire une formule $\varphi_E(x,y)$ avec 2 variables libres x et y telle qu'un mot w satisfait $\varphi_E(x,y)$ sous une interprétation $\{x \mapsto i, y \mapsto j\}$ ssi $i \leqslant j$ et le facteur du mot w compris entre les positions i et j est dans $\mathcal{L}(E)$.

Exo 3 On considère la logique FO(+) dans laquelle les formules sont construites à partir des formules atomiques $a(x)$, qui s'interprète comme "la position x porte la lettre a", et $x = y + z$ avec l'interprétation naturelle de l'addition.

1. Montrer que tout langage définissable dans FO est aussi définissable dans FO(+).
2. Montrer que $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ est définissable dans FO(+).
3. Déduire que la relation ternaire $R(x,y,z) \equiv x = y + z$ n'est pas définissable dans MSO.

Logique MSO sur les termes

Exo 4

On considère des arbres binaires (chaque nœud a 0 ou 2 fils) dont les nœuds sont étiquetés par le même symbole. Les feuilles sont étiquetées par des lettres d'un alphabet Σ.

1. Construisez des formules MSO décrivant les langages d'arbres suivants :
   - L'ensemble des arbres dont la frontière commence par la lettre $a \in \Sigma$.
   - L'ensemble des arbres dont la frontière ne contient pas le facteur ab, où $a, b \in \Sigma$.

Exo 5

On considère des termes sur $F = F_0 \cup F_2$, où $F_0 = \{a,b\}, F_2 = \{f,g\}$.
Construire des formules MSO décrivant les langages suivants :

1. L'ensemble des arbres dont la feuille la plus à gauche est étiquetée par a.
2. L'ensemble des arbres contenant 2 nœuds u, v étiquetés par f, tels que u est ancêtre de v.

3. L'ensemble des arbres contenant 2 nœuds u, v étiquetés par f, tels que u et v ne sont pas ancêtre l'un de l'autre.
4. L'ensemble des arbres contenant un nombre pair de nœuds étiquetés par f.
5. L'ensemble des arbres dont la branche la plus à droite contient au moins un nœud étiqueté par f.