Université Bordeaux 1 Licence d'Informatique Semestre 6 Printemps 2011

INFORMATIQUE THÉORIQUE 2

Feuille 4 : Langages rationnels de termes

Opérations sur les termes

Exo 1 Soit F un alphabet gradué, V un ensemble de variables, $v, w \in V$, $A, B, C \subseteq T(F, V)$, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n, B_n \subseteq T(F, V)$.

1- Parmi les identités suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

$$(A \circ_v B) \circ_v C = A \circ_v (B \circ_v C).$$

$$(A \circ_v B) \circ_w C = A \circ_v (B \circ_w C).$$

$$(A^{*_v})^{*_v} = A^{*_v}, \;\; (A^{*_v})^{*_w} = (A^{*_w})^{*_v}$$

$$(A \cup B) \circ_v C = (A \circ_v C) \cup (B \circ_v C)$$

$$A \circ_v (B \cup C) = (A \circ_v B) \cup (A \circ_v C)$$

$$(\bigcup_{n \geq 0} A_n) \circ_v B = \bigcup_{n \geq 0} (A_n \circ_v B)$$

$$A \circ_v (\bigcup_{n \geq 0} B_n) = \bigcup_{n \geq 0} (A \circ_v B_n)$$

2- On suppose que les suites $(A_n)_{n \geq 0}, (B_n)_{n \geq 0}$ sont croissantes pour l'inclusion. Sous cette hypothèse supplémentaire, que pouvez-vous dire des deux dernières identités ?

Exo 2 Soit F un alphabet gradué, V un ensemble de variables et $v \in V$.

On définit l'opération unaire $A \mapsto A^{\otimes_v}$ par :

$$A^{\otimes_v} := \bigcup_{n \geq 0} A^{(n,v)}.$$

On rappelle que $A^{(0,v)} = \{v\}$ et $A^{(n+1,v)} = A \circ_v A^{(n,v)}$.

1- Que vaut $A^{\otimes_v}$ lorsque $A = \{f(v, v)\}$ (où f est un symbole d'arité 2) ?

2- Le langage $A^{\otimes_v}$ est-il rationnel ?

3- Peut-on exprimer l'opération $*_v$ à partir des opérations $\otimes_v$, $\circ_v$, $\cup$ et des langages finis de $T(F, V)$?

4- Peut-on exprimer l'opération $\otimes_v$ à partir des opérations $*_v$, $\circ_v$, $\cup$ et des langages finis de $T(F, V)$?

Exo 3 On considère l'équation suivante où L est l'inconnue, qui prend ses valeurs dans $\mathcal{P}(T(F, V))$, et $A, B \in \mathcal{P}(T(F, V)$ sont considérés comme des constantes :

$$L = (A \circ_v L) \cup B. \tag{1}$$

1- Montrer que toute solution L de l'équation (1) contient B.

2- Montrer que toute solution L de l'équation (1) contient $A \circ_v B$.

3- En déduire que toute solution L de l'équation (1) contient $(A \cup \{v\}) \circ_v B$.

4- Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et toute solution L de l'équation (1), $(A \cup \{v\})^{(n,v)} \circ_v B \subseteq L$.

5- Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et toute solution L de l'équation (1), $A^{*_v} \circ_v B \subseteq L$.

6- Décrire la plus petite solution L_0 (pour l'inclusion) de l'équation (1).

Expressions rationnelles de termes

Exo 4 Soit $F = \{f, m, a\}$ avec $\mathbf{ar}(f) = 2, \mathbf{ar}(m) = 1, \mathbf{ar}(a) = 0$, soit $V = \{v, w\}$ un ensemble de variables et soit $\bullet$ une variable qui n'appartient pas à V.

1- Donner une expression rationnelle pour chacun des langages de termes : $T(F, V), T(F), \mathcal{C}_1(F)$.

2- Soit $t = f(f(v, a), w)$. Donner une expression rationnelle pour le langage formé de tous les termes

$$C[t\sigma]$$

où σ décrit toutes des substitutions $T(F, V) \to T(F)$ et C décrit tous les contextes de $\mathcal{C}_1(F)$.

Exo 5 Soit $F = F_0 \cup F_2$ avec $F_2 = \{a, b, c\}$ et $F_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Construisez une expression rationnelle qui décrit l'ensemble des termes sur F, dont la branche la plus à droite est étiquetée par $(a + b + c)^* abb(a + b + c)^* x_1$.

Exo 6 On considère des termes sur $F = F_0 \cup F_2$, où $F_0 = \{a, b\}, F_2 = \{f, g\}$.

Construire des expressions rationnelles décrivant :

1. l'ensemble des termes dont la feuille la plus à gauche est étiquetée par a.
2. l'ensemble des termes contenant 2 nœuds u, v étiquetés par f, tels que u est ancêtre de v.
3. l'ensemble des termes contenant 2 nœuds u, v étiquetés par f, tels que u et v ne sont pas ancêtre l'un de l'autre.
4. l'ensemble des termes dont la branche la plus à droite contient au moins un nœud étiqueté par f.