Université Bordeaux 1 Licence d'Informatique Semestre 6 Printemps 2010

INFORMATIQUE THÉORIQUE 2

Feuille 3 : Automates finis sur les termes

Exo 1 On considère la suite d'arbres binaires $(t_n)_{n\geq 0}$ définie inductivement par $t_0 = a$ et $t_{n+1} = f(t_n, t_n)$.

1. Quelle est la taille $\|t_n\|$ de l'arbre t_n (la taille correspondant au nombre des nœuds) ?
2. Construisez un automate de termes $\mathcal{A}_n$ avec le moins d'états possible, qui reconnaît $\{t_n\}$.

Exo 2 Soit $F = F_0 \cup F_2$ avec $F_2 = \{a, b, c\}$ et $F_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$.

1. Construisez un automate de termes qui reconnaît l'ensemble des termes sur F, dont la branche la plus à droite est étiquetée par $(a + b + c)^*abb(a + b + c)^*x_1$.
2. Construisez un automate de termes qui reconnaît l'ensemble des termes sur F, dont la frontière ne contient pas le facteur x_1x_2.
3. Plus généralement, montrer qu'étant donné un langage rationnel de mots $L \subseteq F_0^*$, l'ensemble des termes dont la frontière est dans L est un langage de termes reconnaissable.

Exo 3 Soit $F_0 = \{a\}, F_1 = \{g\}, F_2 = \{f\}$.

1. Construire un automate de termes qui reconnaît l'ensemble des termes de la forme $f(f(a, t_1), g(t_2))$, où $t_1, t_2 \in T(F)$, $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2$.
2. Construire un automate déterministe qui reconnaît l'ensemble des termes de $T(F_0 \cup F_1)$ dont la hauteur est paire.

Exo 4 Soit $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2$, où $F_0 = \{0, 1\}$, $F_1 = \{\text{not}\}$, $F_2 = \{\text{and,or}\}$.

Construire un a.f.t. déterministe complet qui reconnaît les arbres de $T(F)$ correspondant aux formules booléennes qui s'évaluent à *Vrai*.

Exo 5

1. Soit $\mathcal{A}$ un a.f. (sur les mots) à n états tel que $\mathrm{L}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$. Donnez une majoration (la meilleure possible) de $\min\{|w| \mid w \in \mathrm{L}_{\mathcal{A}}\}$.
2. Soit $\mathcal{A}$ est un aft à n états sur l'alphabet $F = F_0 \cup F_2$ (arbres binaires). Donnez une majoration (la meilleure possible) de $\min\{\|t\| \mid t \in \mathrm{L}_{\mathcal{A}}\}$.

Exo 6

On considère des termes sur $F = F_0 \cup F_2$, où $F_0 = \{a, b\}, F_2 = \{f, g\}$.

Construire des automates finis de termes reconnaissant les langages suivants (si possible, proposez des automates déterministes) :

1. L'ensemble des arbres dont la feuille la plus à gauche est étiquetée par a.
2. L'ensemble des arbres contenant 2 nœuds u, v étiquetés par f, tels que u est ancêtre de v.
3. L'ensemble des arbres contenant 2 nœuds u, v étiquetés par f, tels que u et v ne sont pas ancêtre l'un de l'autre.

4. L'ensemble des arbres contenant un nombre pair de nœuds étiquetés par f.
5. L'ensemble des arbres dont la branche la plus à droite contient au moins un nœud étiqueté par f.

Exo 7

1. Montrez que l'ensemble des termes dont toutes les feuilles ont la même profondeur, n'est pas reconnaissable.
2. Montrez que l'ensemble des termes dont toutes les feuilles ont une profondeur paire, est reconnaissable
3. Montrez que l'ensemble des termes de hauteur paire, n'est pas reconnaissable.

Exo 8

Soit $F = F_0 \cup F_2$. Une *congruence* sur $T(F)$ est une relation d'équivalence $\equiv$ qui satisfait la propriété suivante : pour tout $f \in F_2$ et $t_1 \equiv t'_1$, $t_2 \equiv t'_2$, on a aussi $f(t_1, t_2) \equiv f(t'_1, t'_2)$.

1. Montrez qu'une relation d'équivalence $\equiv$ sur $T(F)$ est une congruence ssi pour tout contexte C, $t \equiv t'$ implique $C[t] \equiv C[t']$.
2. Soit $\mathcal{A}$ un aft, et Q l'ensemble des états. On définit la relation $\sim_{\mathcal{A}}$ sur $T(F)$ par $t \sim_{\mathcal{A}} t'$ ssi
$$\forall q \in Q, t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q \Leftrightarrow t' \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q.$$
Montrez que $\sim_{\mathcal{A}}$ est une congruence (d'indice fini) sur $T(F)$.

Exo 9 Soit $F = \{a, m, f\}$ avec $\mathbf{ar}(a) = 0, \mathbf{ar}(m) = 1, \mathbf{ar}(f) = 2$. On définit le codage d'un terme $t \in T(F)$ par le mot $c(t)$ sur l'alphabet F inductivement :
- Si $t = a$ alors $c(t) = a$.
- Si $t = f(t_1, t_2)$, alors $c(t) = fc(t_1)c(t_2)$.
- Si $t = m(t_1)$, alors $c(t) = mc(t_1)$.

1. Montrez que $c(\cdot)$ est un codage.
2. Montrez que $\{c(t) \mid t \in T(F)\}$ est un langage algébrique.