INFORMATIQUE THÉORIQUE 2

Feuille 2 : Grammaires algébriques

Exercice 2.1 *langage engendré*
Soit $G = \langle \Sigma, V, R, S \rangle$ la grammaire suivante : $\Sigma = \{a, \#\}, V = \{S, T, U\}$,

$$R : \begin{cases} S \to TT \mid U \\ T \to aT \mid Ta \mid \# \\ U \to aUaa \mid \# \end{cases}$$

Déterminez le langage $\mathrm{L_G}$ engendré par G.

Exercice 2.2 *grammaires*
Construisez des grammaires algébriques pour les langages suivants (et justifiez la validité de la grammaire) :

1. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
2. $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$
3. $\{a^p b^q c^r \mid p + q = r\}$
4. $\{a^p b^q c^r \mid p = q \text{ ou } q = r\}$
5. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
6. $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
7. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a > |w|_b\}$
8. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$
9. $\{v\#w \mid v^{\text{rev}} \text{ est facteur de } w\}$

Exercice 2.3 *grammaire*
On considère le langage

$$L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 2|w|_b\}.$$

Parmi les grammaires suivantes, lesquelles engendrent L_2 ?
$G_1 : S \to aabS + abaS + baaS + \varepsilon$
$G_2 : S \to aabS + abaS + baaS + SS + \varepsilon$
$G_3 : S \to aSaSb + aSbSa + bSaSa + \varepsilon$
$G_4 : S \to aSaSb + aSbSa + bSaSa + SS + \varepsilon$
$G_5 : S \to aSaSbS + aSbSaS + bSaSaS + \varepsilon$

Exercice 2.4 *Langages de Dyck*
On appelle "mot bien-parenthésé" sur les deux paires de parenthèses $(,), [,]$ un mot sur lequel il existe un couplage entre les positions des parenthèses fermantes et ouvrantes vérifiant les conditions suivantes :
- chaque ouvrante est couplée avec une fermante du même type (i.e. (avec) et [avec])
- chaque ouvrante est couplée avec une fermante plus à droite dans le mot
- il n'y a pas de "croisement" entre les couples, (comme dans ([)], par exemple).
Quelque exemples :
$()[()[]], ()$ sont bien parenthésés alors que $](([]))[, ()[[$ ne sont pas bien parenthésés.
1- Formaliser rigoureusement la notion de *couplage* et les 3 conditions ci-dessus.

2- Donner une grammaire algébrique qui engendre l'ensemble des mots bien parenthésés sur $(,),[,]$.

Exercice 2.5 *langage*

Soit $G = \langle \{a,b\}, \{S\}, R, S\rangle$ où l' ensemble R des règles est $S \to aS \mid aSbS \mid \epsilon$. Montrez que $\mathrm{L_G} = \{\mathrm{w} \in \{\mathrm{a,b}\}^* \mid |\mathrm{v}|_\mathrm{a} \geq |\mathrm{v}|_\mathrm{b}$ pour chaque préfixe v de $w\}$.

Exercice 2.6 *grammaire*

Etant donnée une grammaire algébrique $G = \langle \Sigma, V, R, S\rangle$, construisez une grammaire algébrique qui décrit le langage miroir $(\mathrm{L_G})^{\mathrm{rev}} = \{\mathrm{a_n} \ldots \mathrm{a_0} \mid \mathrm{a_0} \ldots \mathrm{a_n} \in \mathrm{L_G}\}$.

Formes normales pour les grammaires algébriques

Exercice 2.7 *forme normale*

Soit G la grammaire dont les règles sont

$$\begin{array}{ll} S \to ST + T + U & T \to bT + aVX + \varepsilon \\ U \to bU + abW + \varepsilon & V \to bT + UV \\ W \to bUX + TUV & X \to aXU + bTYZ \\ Y \to aYb + aW & Z \to XU + aZY \end{array}$$

1- Quels sont les symboles non terminaux accessibles à partir de S ?
Quels sont les symboles non terminaux qui engendrent un langage vide ?
Quels sont les symboles non terminaux qui engendrent le mot vide ?
2- Transformer cette grammaire en une grammaire équivalente propre et réduite.
3- Transformer cette grammaire en une grammaire équivalente en forme normale de Chomsky.

Exercice 2.8 *forme normale*

Transformez la CFG suivante en forme normale de Chomsky : $G = \langle \{a,b\}, \{S,A,B\}, R, S\rangle$, où

$$R : \left\{ \begin{array}{l} S \to bA \mid aB \\ A \to bAA \mid aS \mid a \mid \epsilon \\ B \to aBB \mid bS \mid b \mid \epsilon \end{array} \right.$$

Lemme d'itération

Exercice 2.9 *non-algébriques*

Montrez que les langages suivants ne sont pas des langages algébriques :

1. $\{a^n b^n a^n b^n \mid n \geq 0\}$
2. $\{a^n \# a^{2n} \# a^{3n} \mid n \geq 0\}$
3. $\{v\#w \mid v, w \in \{a,b\}^*,\ v \text{ est facteur de } w\}$
4. $\{(a^n b)^n \mid n \geq 0\}$

Exercice 2.10 *co-algébrique*

Soit $A = \{a,b\}$. On considère le langage $L = \{ww \mid w \in A^*\}$.

1. Montrer que L n'est pas algébrique.

2. Montrer que les langages $L_a = \{uav \in A^* \mid |u| = |v|\}$ et $L_b = \{ubv \in A^* \mid |u| = |v|\}$ sont algébriques.

3. Montrer que $A^* - L = L_a + L_b + L_a L_b + L_b L_a$.

En déduire que $A^* - L$ est algébrique et donner une grammaire algébrique de ce langage.

Exercice 2.11 *intersection*
Trouvez trois langages algébriques K, L, M tels que $K \cap L \cap M = \{(a^n b)^n \mid n \geq 0\}$.
Exercice 2.12 *ll-2*
Trouvez un langage qui n'est pas algébrique, mais qui satisfait le lemme d'itération des langages algébrique.

Propriétés de clôture
Exercice 2.13 *modulo*
Montrer que les langages suivants sont algébriques :

$$L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b \text{ et } |w|_a \text{ est pair}\}.$$

$$L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 31 \cdot |w|_a - 52 \cdot |w|_b = 0\}.$$

$$L_3 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid 3|w|_a = |w|_b \text{ et } |w|_a + |w|_b + |w|_c \equiv 0(mod5)\}.$$

Exercice 2.14 *algébrique ou non-algébrique ?*
Soit $L, L' \subseteq X^*$ des langages algébriques et $\#$ une lettre n' appartemnant pas à X. Les langages suivants sont-ils toujours algébriques ?
$Pref(L) := \{u \in X^* \mid \exists v \in X^*, uv \in L\}$
$P(L) := \{u\#v \mid uv \in L\}$
$T(L, L') := \{uwv \mid uv \in L, w \in L'\}$
$U(L) := \{u\#v \mid u \in X^*, v \in X^*, |u| = |v| \text{ ou } uv \in L\}$
$V(L) := \{u\#v \mid u \in X^*, v \in X^*, |u| = |v| \text{ et } uv \in L\}$

Automates à pile
Exercice 2.15 *automate à pile*
Construisez des automates à pile qui reconnaissent les langages de l'exercice 2.
Exercice 2.16 *automate à pile*

1. Rappelez comment, à partir d'une grammaire algébrique G, on peut construire un automate à pile qui reconnait le langage $\mathrm{L_G}$ par pile vide.
2. Appliquez la construction précédente à la grammaire algébrique $G = \langle \{a,b\}, \{S,A\}, R, S\rangle$ avec les règles $S \to aAA$, $A \to aS \mid bS \mid a$.

Exercice 2.17 *automate à pile*

1. Etant donné un automate à pile $\mathcal{A} = \langle X, \Gamma, Q, z_0, q_0, \delta\rangle$ et un automate fini déterministe $\mathcal{B} = \langle X, Q', q_0', F', \delta'\rangle$, construisez un automate à pile qui reconnait $\mathrm{L}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{L}(\mathcal{B})$.
2. Etant donné un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Y, \Gamma, Q, z_0, q_0, \delta\rangle$ et un homomorphisme $h : X^* \to Y^*$, construisez un automate à pile qui reconnait l'image inverse $h^{-1}(\mathrm{L}(\mathcal{A})) = \{\mathrm{u} \in \mathrm{X}^* \mid \mathrm{h(u)} \in \mathrm{L}(\mathcal{A})\}$.

Exercice 2.18 *modes d'acceptance*
Montrez que pour les automates à pile, les deux conditions d'acceptance : 1) par état final et 2) par pile vide, sont équivalentes.