Université Bordeaux 1 — Licence d'Informatique — Semestre 6 — Printemps 2010

INFORMATIQUE THÉORIQUE 2

Feuille 1 : Langages rationnels

Exercice 1.1 *numération*
Construisez un DFA qui reconnait l'ensemble T des représentations binaires des entiers positifs divisibles par 3.

Exercice 1.2 *identités*
Soient L, K deux langages. Déterminez pour chacune des égalités suivantes si elle sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. $L^+ = L^* \setminus \{\epsilon\}$
2. $\{\epsilon\} \cup L(L \cup K)^*K = (L^+K)^*$
3. $L^{-1}L = \{\epsilon\}$
4. $L(L^{-1}K) = K$

Exercice 1.3 *résiduels*

1. Calculez pour chacun des cas suivants le quotient LK^{-1} et précisez (en justifiant la réponse) s'il est reconnaissable ou pas :
   (a) $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $K = b^*$.
   (b) $L = (aa)^*$, $K = \{a^p \mid p \text{ est premier}\}$
   (c) $L = (aaaa)^*$, $K = \{a^p \mid p \text{ est premier}\}$
2. Soit L un langage reconnaissable, et K un langage quelconque. Montrez que $K^{-1}L$ est aussi reconnaissable.

Exercice 1.4 *déterminisme vs non-déterminisme*

1. Donnez un NFA avec n états pour le langage $L = (a + b)^*a(a + b)^{n-2}$.
2. Montrez que tout DFA reconnaissant L possède au moins 2^{n-1} états.

Exercice 1.5 *Glushkov*
Pour chacune des expressions suivantes, construisez un NFA équivalent (sans transitions ϵ) en utilisant la construction de Glushkov :

1. $aab^*(ab)^* + ab^* + a^*bba^*$
2. $a((ab)^*cb^*)^* + a(ababacb^*)^*a^*$

Exercice 1.6 *automate minimal*
Soit $L = a^*ba + b^*aba$. Construisez l'automate minimal reconnaissant L en calculant les résiduels.

Exercice 1.7 *rationnel ou non-rationel ?*
Parmi les langages suivants, lesquels sont réguliers ? Justifiez votre réponse.

1. $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$
2. $\{a^n b^m \mid m \equiv n \pmod{42}\}$
3. $\{w \in \{a, b\}^* \mid \exists x, y, z \in \{a, b\}^* : \ w = xyyz\}$

Exercice 1.8 *le barman aveugle*
Le jeu du barman aveugle consiste à poser quatre verres en cercle sur un plateau. Les verres peuvent être retournés ou non. Le but du barman est de s'arranger pour que tous les verres soient dans le même sens, mais sans les voir. Le but de son adversaire est qu'il n'y arrive pas. Le jeu se joue par tours. Un tour s'organise comme suit :

- Le barman retourne un ou deux verres de son choix. Pour qu'il ne récupère pas d'information en les touchant on lui met des gants de boxe ;
- L'adversaire fait faire un nombre quelconque de quarts de tours au plateau.

Si le barman place les verres dans le même sens, le jeu s'arrête.

On appelle configuration du plateau à un instant donné la position des verres à cet instant. En numérotant les verres dans l'ordre, on peut représenter une configuration par (haut,bas,bas,haut).

1. En remarquant que pour le barman, les configurations obtenues par rotation du plateau sont équivalentes (i.e. $\forall a, b, c, d$ (a, b, c, d), (b, c, d, a), (c, d, a, b) et (d, a, b, c) sont équivalents) montrer qu'il y a quatre configurations possibles du plateau et qu'il y a trois actions possibles pour le barman.
2. Représenter les exécutions possibles du jeu par un automate non déterministe.
3. Déterminiser l'automate.
4. En remarquant qu'obtenir une stratégie gagnante pour le barman revient à trouver une suite d'actions qui, quelle que soit la configuration de départ, passe par un état final, aider le barman à gagner.