UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010/2011 1ÈRE SESSION DE PRINTEMPS **Parcours :** CSB6 **Code UE :** INF253 **Épreuve :** Informatique Théorique 2 **Date :** 04 Mai 2010 **Heure :** 14 H **Durée :** 3H Documents : autorisés Épreuve de : Mr Géraud Sénizergues	Département Licence

Les trois exercices et le problème sont indépendants.
La note obtenue à l'examen, sur 20, est le minimum entre 20 et le total des points obtenus aux divers exercices et au problème.

Exercice 1 [5 points]

Pour chacun des langages K_i suivants ($1 \leq i \leq 5$), sur l'alphabet $\{a, b, c, \#\}$, déterminer si K_i est algébrique. Justifier chaque réponse.

- $K_1 := \{a^p b^q c^r \mid p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0, p + q = r\}$
- $K_2 := \{a^p b^q c^r \mid p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0, p + q \geq r\}$
- $K_3 := \{a^p b^q c^r \mid p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0, p \geq q \geq r\}$
- $K_4 := \{a^p b^q c^r \mid p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0, p \geq q$ ou $q \geq r\}$
- $K_5 := \{u\#v\#w \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, w \in \{a, b\}^*, |u| \geq |v| \geq |w|\}$

Exercice 2 [5 points]

Considérons l'alphabet gradué $F = \{f, m, a, b\}$ avec $\mathbf{ar}(f) = 2, \mathbf{ar}(m) = 1, \mathbf{ar}(a) = \mathbf{ar}(b) = 0$.
On définit une suite de termes t_n dans $T(F)$ par : $t_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{2n+1} = f(a, t_{2n}), \quad t_{2n+2} = m(t_{2n+1}).$$

1- Calculer t_1, t_2, t_3, t_4.
2- Le langage $L_1 := \{t_n \mid n \geq 0\}$ est-il reconnaissable ? (justifier la réponse)

Pour tout terme t on note $\mathcal{F}(t)$ l'ensemble de ses feuilles.
Exemple : Lorsque $t = f(a, f(a, b))$, on a $\mathrm{dom}(t) = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11\}$, $\mathcal{F}(t) = \{0, 10, 11\}$ et $t(\varepsilon) = f, t(0) = a, t(1) = f, t(10) = a, t(11) = b$.

On considère les langages de termes suivants :

$$L_2 := \{t \in T(F) \mid \exists u \in \mathcal{F}(t), \exists v \in \mathcal{F}(t), u \neq v \text{ et } |u| = |v|\}.$$
$$L_3 := \{t \in T(F) \mid \exists u \in \mathcal{F}(t), \exists v \in \mathcal{F}(t), t(u) \neq t(v)\}.$$

Moins formellement : L_2 est formé des termes qui possèdent au moins deux feuilles différentes à la même profondeur. Le langage L_3 est formé des termes qui possèdent au moins deux feuilles qui ont des étiquettes différentes.
3- Vérifier que $f(a, b) \in L_2, f(a, m(b)) \notin L_2, f(a, f(a, b)) \in L_3, f(a, f(a, a)) \notin L_3$.
4- L_2 est-il reconnaissable ? (justifier la réponse)
5- L_3 est-il reconnaissable ? (justifier la réponse)

Exercice 3 [5 points]
On considère la formule MSO

$$\Phi := \forall x \cdot \forall y \cdot [P_a(x) \wedge S(x,y) \to P_a(y)] \wedge [P_b(x) \wedge S(x,y) \to P_b(y)]$$

1- Donner une expression rationnelle pour le langage $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \models \Phi\}$.
2- On considère la formule MSO,

$$\begin{aligned} \Psi \quad := \quad & \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot \\ & [(P_a(x) \wedge P_a(y) \wedge S(x,y) \wedge S(y,z)) \to P_b(z)] \wedge \\ & [(P_a(x) \wedge P_b(y) \wedge S(x,y) \wedge S(y,z)) \to P_b(z)] \wedge \\ & [(P_b(x) \wedge P_b(y) \wedge S(x,y) \wedge S(y,z)) \to P_b(z)] \end{aligned}$$

Donner une expression rationnelle pour le langage $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \models \Psi\}$.

On considère maintenant le langage $L := baabbb^*$.
3- Vérifier (en quelques lignes) qu'un mot $u \in \{a,b\}^*$ appartient au langage L si et seulement si

- la première lettre de u est un b
- la seconde lettre de u est un a
- tout facteur ba , dans u, est immédiatement suivi d'un a
- tout facteur aa , dans u, est immédiatement suivi d'un b
- tout facteur ab , dans u, est immédiatement suivi d'un b
- tout facteur bb , dans u, est en position de suffixe du mot u ou bien est immédiatement suivi d'un b.

4- Écrire une formule MSO Θ, sur la signature $\{S, P_a, P_b\}$, telle que

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid w \models \Theta\} = L.$$

PROBLÈME [20 points]

On considère l'alphabet $X := \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$ et la grammaire algébrique suivante :

$$G := \langle X, \{S\}, P, S \rangle,$$

où P est constitué des règles :

$$S \to SS \;+\; aS\bar{a} \;+\; \bar{a}Sa \;+\; bS\bar{b} \;+\; \bar{b}Sb \;+\; \varepsilon$$

On note $N_2 := L_G$ (N_2 est le *langage de Dyck* sur 2 paires de parenthèses).

PARTIE 1 : le langage de Dyck.

1- Vérifier que les mots suivants appartiennent à N_2 :

$$a\bar{a}, \;\; b\bar{b}, \;\; a\bar{a}b\bar{b}, \;\; ab\bar{b}\bar{a}.$$

2- Montrer que les mots suivants n'appartiennent pas à N_2 :

$$aa, a\bar{b}, ab\bar{a}\bar{b}.$$

On considère les opérations suivantes : $u \mapsto \tilde{u}$ est définie par

$$\text{si } u = x_0 x_1 \cdots x_n (\text{ avec } x_0, x_1, \ldots, x_n \in X),\ \text{ alors } \tilde{u} = x_n \cdots x_1 x_0.$$

$\theta : X^* \to X^*$ est l'homomorphisme de monoïdes tel que

$$\theta(a) = \bar{a},\ \ \theta(\bar{a}) = a,\ \ \theta(b) = \bar{b},\ \ \theta(\bar{b}) = b.$$

$\mathrm{I} : X^* \to X^*$ est l'application définie par

$$\forall u \in X^*, \mathrm{I}(u) = \theta(\tilde{u}).$$

3- Vérifier que, pour tous $u, v \in X^*$, $\mathrm{I}(\mathrm{I}(u)) = u$ et $\mathrm{I}(u \cdot v) = \mathrm{I}(v) \cdot \mathrm{I}(u)$.
4- Montrer que, si $u \in N_2$ et $v \in N_2$ alors $u \cdot v \in N_2$ (i.e. N_2 est clos par produit).
5- Montrer que N_2 est clos par les opérations :

$$u \mapsto \tilde{u},\ \ u \mapsto \theta(u),\ \ u \mapsto \mathrm{I}(u).$$

i.e. que si $u \in N_2$ alors $\tilde{u} \in N_2$, $\theta(u) \in N_2$, $\mathrm{I}(u) \in N_2$.
6- Montrer que, si $x \in X$ et $u, v \in N_2$ alors $x \cdot u \cdot \theta(x) \cdot v \in N_2$.
7- Montrer que, réciproquement, si $w \in N_2 - \{\varepsilon\}$, alors il existe une lettre $x \in X$ et des mots $u, v \in N_2$ tels que $w = x \cdot u \cdot \theta(x) \cdot v$.
8- Montrer que, pour tous $x \in X, v \in X^*$

$$x \cdot v \in N_2 \Rightarrow v \cdot x \in N_2$$

9- En déduire, par une récurrence sur $|u|$ que, pour tous $u \in X^*, v \in X^*$

$$u \cdot v \in N_2 \Rightarrow v \cdot u \in N_2$$

PARTIE 2 : le groupe libre.

On définit une relation binaire $\equiv$ sur X^* par

$$u \equiv v \Leftrightarrow u \cdot \mathrm{I}(v) \in N_2.$$

10- Montrer que la relation $\equiv$ est réflexive.
11- Montrer que la relation $\equiv$ est symétrique.
12- Montrer que, pour tous $x \in X, v \in X^*$,

$$x\theta(x) \cdot v \in N_2 \Leftrightarrow v \in N_2$$

puis que, pour tous $x \in X, u \in X^*, v \in X^*$,

$$u \cdot x\theta(x) \cdot v \in N_2 \Leftrightarrow u \cdot v \in N_2$$

puis que, pour tous $w \in X^*, u \in X^*, v \in X^*$,

$$u \cdot w\mathrm{I}(w) \cdot v \in N_2 \Leftrightarrow u \cdot v \in N_2$$

13- Montrer que la relation $\equiv$ est transitive.
14- Montrer que, pour tous $\alpha, u, v \in X^*$,

$$u \equiv v \Rightarrow \alpha \cdot u \equiv \alpha \cdot v$$

15- Montrer que, pour tous $\beta, u, v \in X^*$,

$$u \equiv v \Rightarrow u \cdot \beta \equiv v \cdot \beta$$

16- Déduire des questions 14,15 que, pour tous $u, v, u', v' \in X^*$,

$$(u \equiv u' \quad \wedge \quad v \equiv v') \Rightarrow u \cdot v \equiv u' \cdot v'$$

17- Montrer que, pour tout $u, v \in X^*$,

$$u \equiv v \Rightarrow \mathrm{I}(u) \equiv \mathrm{I}(v)$$

On définit l'ensemble $F_2 := X^*/\equiv$ i.e. F_2 est l'ensemble des classes d'équivalence de mots pour la relation $\equiv$. On définit un produit sur F_2 par

$$[u]_\equiv \cdot [v]_\equiv := [u \cdot v]_\equiv \tag{1}$$

18-Vérifier que la définition (1) est non-ambiguë i.e. que le résultat $[u \cdot v]_\equiv$ ne dépend que des classes $[u]_\equiv, [v]_\equiv$.
19-
19.1- Vérifier que $(F_2, \cdot, [\varepsilon]_\equiv)$ est un monoïde.
19.2- Montrer que pour tout $u \in X^*$

$$[u]_\equiv \cdot [\mathrm{I}(u)]_\equiv = [\varepsilon]_\equiv$$

19.3- Montrer que $(F_2, \cdot)$ est un groupe.
20- Vérifier que $N_2 = [\varepsilon]_\equiv$.

PARTIE 3 : le problème de l'inclusion.

On s'intéresse maintenant au problème algorithmique suivant :
Donnée : un automate fini $\mathcal{A}$ sur X
Question : $L_\mathcal{A} \subseteq N_2$?
21- Soient $u, v, u', v' \in X^*$. Montrer que

$$(u' \cdot v' \equiv \varepsilon \quad \wedge \quad u \cdot v' \equiv \varepsilon \quad \wedge \quad u' \cdot v \equiv \varepsilon) \Rightarrow u \cdot v \equiv \varepsilon.$$

22- Montrer que, pour tout a.f. $\mathcal{A}$, il existe un entier K, tel que : pour tout mot $w \in L_\mathcal{A}$, si $|w| \geq K$ alors, il existe des mots $\alpha, u_1, u_2, \beta \in X^*$ tels que :

- (1) $w = \alpha u_1 u_2 \beta$
- (2) $0 < |u_1|$ et $0 < |u_2|$
- (3) $\alpha\{u_1, u_2\}^*\beta \subseteq L_\mathcal{A}$

23- Montrer que, pour tous $\alpha, u_1, u_2, \beta \in X^*$

$$(\alpha\beta \equiv \varepsilon \quad \wedge \quad \alpha u_1 \beta \equiv \varepsilon \quad \wedge \quad \alpha u_2 \beta \equiv \varepsilon) \Rightarrow \alpha u_1 u_2 \beta \equiv \varepsilon.$$

24- Donner un schéma d'algorithme testant, pour tout automate fini $\mathcal{A}$ sur X, si $L_\mathcal{A} \subseteq N_2$.