<table>
<tr><td></td><td>

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2009/2010
1ÈRE SESSION DE PRINTEMPS

Parcours : CSB6
Code UE : INF253
Épreuve : Informatique Théorique 2
Date : 11 Mai 2010
Heure : 14 H
Durée : 3H
Documents : autorisés
Épreuve de : Mr Géraud Sénizergues

</td><td></td></tr>
</table>

Les trois exercices sont indépendants.
La note obtenue à l'examen, sur 20, est le minimum entre 20 et le total des points obtenus aux divers exercices.

Exercice 1 [20 points]

Le but de l'exercice est de calculer le nombre maximum (resp. minimum) d'états de l'automate déterministe complet minimal d'un langage reconnu par un automate fini non-déterministe à n états.

Considérons le langage rationnel :

$$L := (a+b)^*(a+c)(a+b+c)^2$$

1- Vérifier que L est reconnu par un automate fini non-déterministe à 4 états.

On dénote par $\equiv$ la relation binaire sur $\{a,b,c\}^*$ définie par, pour tous mots $u, u' \in \{a,b,c\}^*$:

$$u \equiv u' \Leftrightarrow u^{-1}L = u'^{-1}L$$

2- Montrer que, si $u, u' \in \{a,b\}^3$ et $u \neq u'$ alors $u \not\equiv u'$.
Aide : on pourra considérer $k \in [0,2]$ tel que $u[k] = a \Leftrightarrow u'[k] = b$, poser $\beta = a^k$ et examiner les propriétés $u \cdot \beta \in L?$ $u' \cdot \beta \in L?$
3- Montrer que, si $u, u' \in \{a,b,c\}^3, |u|_c = 0$ et $|u'|_c = 1$, alors $u \not\equiv u'$.
4- Montrer que, si $u, u' \in \{a,b,c\}^3, |u|_c = 1, |u'|_c = 1$ et la position de la lettre c dans u et u' n'est pas la même, alors $u \not\equiv u'$.
5- Montrer que, si $u, u' \in \{a,b\}^k$ avec $0 \leq k \leq 2$ et $u \neq u'$, alors $uca^{2-k} \not\equiv u'ca^{2-k}$.
6- Quelle est la valeur de $(cb^3)^{-1}L$?
7- On définit l'ensemble de mots

$$R := \{a,b\}^3 \cup \{uca^{2-k} \mid 0 \leq k \leq 2, u \in \{a,b\}^k\}.$$

Est-il vrai que, que, si $u, u' \in R$ et $u \neq u'$ alors $u \not\equiv u'$?
8- Est-il vrai que :

$$\forall u \in \{a,b,c\}^*, \exists u' \in R, u \equiv u'?$$

9- Montrer que le nombre de classes de la relation d'équivalence $\equiv$ est inférieur ou égal à 2^4.
10- En vous inspirant de l'ensemble R, déterminer un ensemble de mots $R' \subseteq \{a,b,c\}^*$ vérifiant les propriétés (1)(2) ci-dessous :

$$\mathrm{Card}(R') = 2^4 \tag{1}$$

$$\forall u, u' \in R', u \neq u' \Rightarrow u \not\equiv u' \tag{2}$$

11- Quel est le nombre de classes de la relation d'équivalence $\equiv$?
12- Montrer que

$$\forall u \in \{a, b, c\}^*, \exists! u' \in R', u \equiv u'.$$

13- Combien d'états possède l'automate déterministe complet minimal de L ?

On définit maintenant, pour tout entier naturel $n \geq 2$, le langage rationnel :

$$L_n := (a + b)^*(a + c)(a + b + c)^{n-2}$$

14- Vérifier que L_n est reconnu par un automate fini non-déterministe à n états.

On note $\equiv_n$ la relation binaire sur $\{a, b, c\}^*$ définie par, pour tous mots $u, u' \in \{a, b, c\}^*$:

$$u \equiv_n u' \Leftrightarrow u^{-1}L_n = u'^{-1}L_n$$

15- Quel est le nombre de classes de la relation d'équivalence $\equiv_n$?
Aide : on définira un ensemble R'_n analogue au R' construit à la question 10, mais possédant 2^n éléments.
16- Combien d'états possède l'automate déterministe complet minimal de L_n ?

Pour tout entier $n \geq 0$ nous définissons le nombre $\mathrm{dmax}(n)$ (resp. $\mathrm{dmin}(n)$) comme le maximum (resp. minimum) possible du nombre d'états de l'automate déterministe complet minimal d'un langage reconnu par un automate fini non-déterministe à n états.
17- Calculer, pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{dmin}(n)$ et $\mathrm{dmax}(n)$.

Exercice 2 [12 points]
Indication : Les parties I et II sont indépendantes. On remarquera que les questions 4-5-6-7 restent relativement "concrètes".

On étudie, dans cet exercice, la stabilité de l'ensemble des langages algébriques par quotient à gauche. On rappelle que, si L, M sont des langages sur alphabet X, le quotient à gauche de M par L est défini par :

$$L^{-1}M := \{v \in X^* \mid \exists u \in L, u \cdot v \in M\}.$$

On admettra que, si $(L_i)_{i \in I}$ est une famille de langages sur X et M un langage sur X, alors

$$(\bigcup_{i \in I} L_i)^{-1}M = \bigcup_{i \in I}(L_i^{-1}M) \tag{3}$$

Partie I

1- Supposons que le langage M possède n langages résiduels $u^{-1}M$ différents. Combien y a-t-il de langages $L^{-1}M$ différents ?
2- Montrer que, si M est un langage rationnel et L un langage quelconque, alors $L^{-1}M$ est rationnel.
On définit l'alphabet $Y := \{a, b, c\}$.
3- Supposons que M est un langage algébrique sur Y et que L est un langage rationnel sur Y.

On introduit un alphabet auxiliaire $\bar{Y} := \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ et les homomorphismes $\varphi, \psi : (Y \cup \bar{Y})^* \to Y^*$ définis par :

$$\forall y \in Y, \varphi(y) = y, \varphi(\bar{y}) = y, \psi(y) = \varepsilon, \psi(\bar{y}) = y.$$

3.1 Montrer que le langage $\varphi^{-1}(M) \cap (L \cdot \bar{Y}^*)$ est algébrique.
(On rappelle que la notation $\varphi^{-1}(M)$ désigne $\{u \in (Y \cup \bar{Y})^* \mid \varphi(u) \in M\}$) ;
3.2 Exprimer le langage $L^{-1}M$ à partir de $\varphi^{-1}(M) \cap (L \cdot \bar{Y}^*)$ et de l'application ψ. En déduire que $L^{-1}M$ est algébrique.

Partie II

On examine maintenant le cas où L et M sont algébriques.
On utilise la notation $\tilde{u}$ pour désigner le mot *miroir* d'un mot u :
si $u = a_1 a_2 \cdots a_\ell$ où chaque a_i est une lettre, alors $\tilde{u} = a_\ell \cdots a_2 a_1$.
On considère les langages sur l'alphabet $\{a, b, c, \#\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SYM} &:= \{u\#\tilde{u} \mid u \in \{a,b,c\}^*\} \\
M &:= \{u_1\#\tilde{u_1}\#u_2\#\tilde{u_2}\#\cdots u_n\#\tilde{u_n} \mid n \geq 1, \forall i \in [1,n], u_i \in a^+b^+c^+\} \\
N &:= \{c^r b^q a^p \# a^{p+1} b^{q+1} c^{r+1} \# \mid p \geq 1, q \geq 1, r \geq 1\} \\
L &:= abc\#N^*
\end{aligned}$$

4- Donner une grammaire algébrique qui engendre le langage SYM. En déduire que SYM et M sont algébriques.
5- Donner une grammaire algébrique qui engendre le langage N. En déduire que N et L sont algébriques.
6- Que vaut $((abc\#)^{-1}M) \cap c^+b^+a^+$? Que vaut $((abc\#N)^{-1}M) \cap c^+b^+a^+$?
7- Soit $n \geq 0$. Combien de mots possède le langage $((abc\#N^n)^{-1}M) \cap c^+b^+a^+$? Décrire ce langage aussi simplement que possible.
8- Montrer que $(L^{-1}M) \cap c^+b^+a^+ = \{c^n b^n a^n \mid n \geq 1\}$.
9- Est-il vrai que, pour tous langages algébriques L et M, le langage $L^{-1}M$ est algébrique ?
10- Est-il vrai que, pour tout langage algébrique L, le langage $L^{-1}L$ est algébrique ?
Aide : On pourra introduire une lettre $z \notin \{a, b, c, \#\}$ et étudier le cas du langage $L_1 := L \cup (Mz)$ (où L, M sont les langages particuliers étudiés dans les questions 4-8).

Exercice 3 [11 points]
On considère l'alphabet gradué $F := \{f, m, a\}$ où $\mathbf{ar}(f) = 2, \mathbf{ar}(m) = 1, \mathbf{ar}(a) = 0$.
On considère les langages suivants :

- $L_1 := \{t \in T(F) \mid t$ a un nombre pair de feuilles$\}$
- $L_2 := \{t \in T(F) \mid t$ a au plus une branche de longueur paire$\}$
- $L_3 := \{t \in T(F) \mid$ au moins une branche de t est étiquetée par un mot du langage $(ff)^*a\}$

1- Pour chaque langage L_i $(1 \leq i \leq 3)$, donner un exemple de terme $t \in L_i$ et un exemple de terme $t' \notin L_i$.
2- Pour chaque langage L_i $(1 \leq i \leq 3)$, donner un automate fini de termes qui reconnaît exactement L_i.

On s'intéresse maintenant au langage

$$L := \{t \in T(F) \mid \text{ une branche de longueur minimum de } t \text{ contient le symbole } m\}$$

(on rappelle que la *longueur* d'une branche allant de la racine, ε, jusqu'à une feuille u, est la longueur de u ; cela revient à dire que la longueur d'une branche est son nombre d'arcs). On fait l'hypothèse suivante :
(**H**) L est reconnu par un automate fini de termes $\mathcal{A} = \langle F, Q, Q_+, \delta \rangle$.

On définit les suites de termes $(M_p)_{p\geq 0}$ et $(K_p)_{p\geq 0}$ par :

$$\begin{array}{rll} M_0 := & a, & K_0 := a \\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad M_{p+1} := m(M_p), & & K_{p+1} := f(K_p, K_p). \end{array}$$

3- Dessiner les cinq termes $M_2, K_2, f(M_1, K_2), f(M_2, K_2), f(M_3, K_2)$.
Vérifier que $f(M_1, K_2) \in L, f(M_2, K_2) \in L$ et $f(M_3, K_2) \notin L$.
4- Caractériser les couples d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $f(M_p, K_q) \in L$.
On note N le nombre d'états de $\mathcal{A}$ et on note k la constante du lemme d'itération valable pour tous les automates finis de termes à N états sur l'alphabet F. (D'après le cours, la valeur $k := 2^{N+1} + 4$ convient).

5- Montrer qu'il existe $r_1, r_2 \in Q$ et $r \in Q_+$ tels que : $M_k \to^*_{\mathcal{A}} r_1, K_k \to^*_{\mathcal{A}} r_2$ et $f(r_1, r_2) \to_{\mathcal{A}} r$.
6- Montrer qu'il existe des entiers $p > q \geq 0$ tel que $f(M_p, K_q) \in L$. Ce fait est-il compatible avec votre réponse à la question 4 ? Que peut-on en conclure concernant l'hypothèse (**H**) ? Le langage L est-il rationnel ?