	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2008/2009 1ÈRE SESSION DE PRINTEMPS **Parcours :** CSB6 **Code UE :** INF253 **Épreuve :** Informatique Théorique 2 **Date :** Mercredi 6 Mai 2009 **Heure :** 14H **Durée :** 3H Documents : autorisés Épreuve de : Mr Géraud Sénizergues	

Les quatre exercices sont indépendants. La note obtenue, sur 20, est le minimum entre 20 et le total des points obtenus.

Exercice 1 [7 points]

On considère les automates finis suivants :

$\mathcal{A}_1 =< X, Q_1, D_1, A_1, \delta_1 >$ où $X = \{a, b\}, Q_1 = \{0, 1, 2\}$, $D_1 = \{0\}$,$A_1 = \{1\}$ et δ_1 est donnée par la table suivante :

$x \setminus q$	0	1	2
a	1	2	0
b	0	1	2

$\mathcal{A}_2 =< X, Q_2, D_2, A_2, \delta_2 >$ où $X = \{a, b\}, Q_2 = \{0, 1, 2\}$, $D_2 = \{0\}$,$A_2 = \{1\}$ et δ_2 est donnée par la table suivante :

$x \setminus q$	0	1	2
a	1	2	2
b	2	0	2

(voir aussi la figure 1).

1- Vérifier que les automates finis $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sont déterministes complets. Sont-ils minimaux ?

2- Donner un automate fini reconnaissant $L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_2}$.

Indication : on pourra construire un automate dont l'ensemble d'états est $Q_1 \times Q_2$ et dont les transitions sont de la forme $((q_1, q_2), x, (r_1, r_2))$ où, (q_i, x, r_i) est une transition de $\mathcal{A}_i$ (pour $i \in \{1, 2\}$).

3- Calculer l'automate fini déterministe complet minimal reconnaissant $L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_2}$.

Exercice 2 [7 points]

On considère l'alphabet terminal $\Sigma := \{a, b\}$ et un alphabet de non-terminaux $N := \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$. Soit la grammaire algébrique $G := \langle \Sigma, N, R, S_1 \rangle$, dont l'ensemble de règles est défini par :

$$R := \left\{ \begin{array}{lcl} S_1 & \to & S_2 a S_3 \,+\, S_1 S_4 \,+\, S_2 S_5 \\ S_2 & \to & S_1 S_2 S_2 \,+\, b S_5 \\ S_3 & \to & S_1 S_3 \,+\, a S_2 S_4 \\ S_4 & \to & a S_3 S_4 \,+\, S_1 S_4 \\ S_5 & \to & S_5 S_2 \,+\, \varepsilon \end{array} \right.$$

1- Donner une grammaire *propre* et *réduite* engendrant le même langage que G.

2- Donner une grammaire en forme normale de Chomsky engendrant le même langage que G.

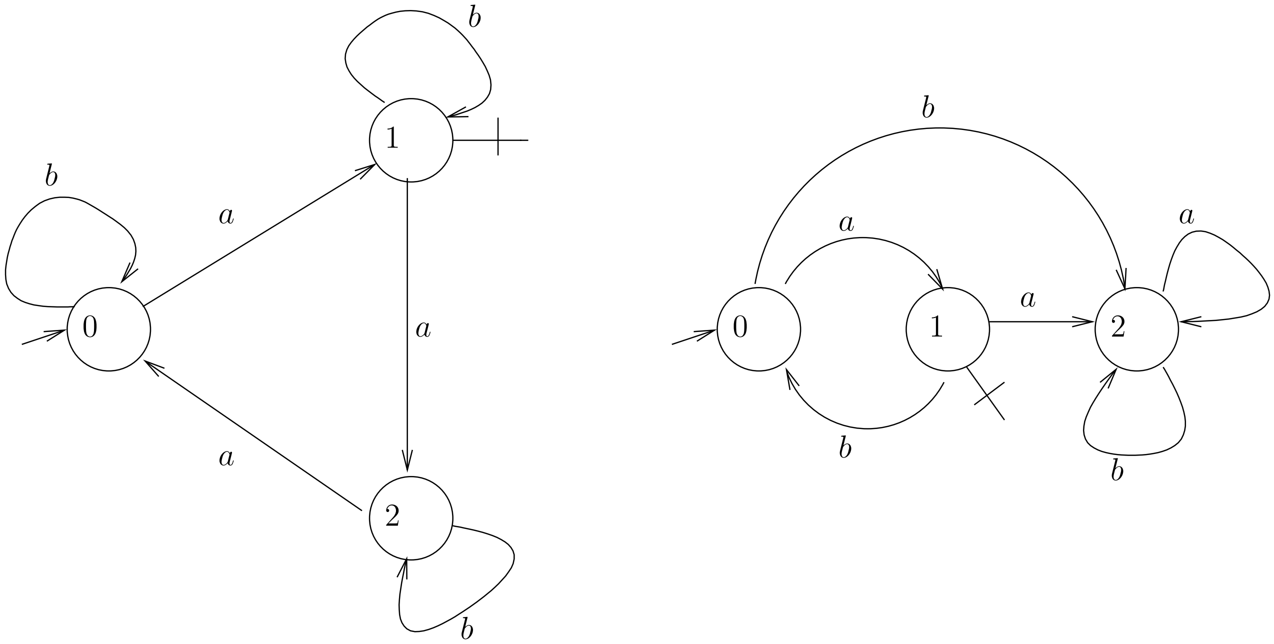

FIG. 1 – Les automates $\mathcal{A}_1$ (à gauche) et $\mathcal{A}_2$ (à droite)

Exercice 3 [5 points]
Attention : dans cet exercice, chaque réponse correcte apporte 0,5 point, chaque réponse fausse retranche 0,5 point, chaque absence de réponse apporte 0 point. La note obtenue à cet exercice, sur 5, est le maximum entre 0 et le total obtenu.
On considère l'automate à pile $\mathcal{A} := \langle \{a, b, c, d\}, \{\Omega, F\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \Omega, q_0, \lambda \rangle$ où λ est constitué des transitions

$$\begin{array}{ccc}
(q_0, \Omega) & \xrightarrow{a} & (q_1, \Omega F) \\
(q_0, \Omega) & \xrightarrow{b} & (q_2, \Omega F) \\
(q_1, F) & \xrightarrow{a} & (q_1, FF) \\
(q_2, F) & \xrightarrow{a} & (q_2, FF) \\
(q_2, F) & \xrightarrow{b} & (q_2, FF) \\
(q_1, F) & \xrightarrow{d} & (q_3, \varepsilon) \\
(q_2, F) & \xrightarrow{d} & (q_3, \varepsilon) \\
(q_3, F) & \xrightarrow{d} & (q_3, \varepsilon) \\
(q_3, \Omega) & \xrightarrow{\varepsilon} & (q_3, \varepsilon) \\
(q_1, F) & \xrightarrow{c} & (q_1, F) \\
(q_2, F) & \xrightarrow{c} & (q_2, F) \\
(q_3, F) & \xrightarrow{c} & (q_3, F)
\end{array}$$

Autrement dit : l'automate $\mathcal{A}$ lit des mots de $\{a, b, c, d\}^*$ sur sa bande d'entrée, stocke un mot de $\{\Omega, F\}^*$ dans la pile, a des états q_0, q_1, q_2, q_3 et commence ses calculs dans l'état q_0 avec le symbole Ω dans la pile. Voici des exemples de calculs de $\mathcal{A}$:

$$(aadd, q_0, \Omega) \vdash_{\mathcal{A}} (add, q_1, \Omega F) \vdash_{\mathcal{A}} (dd, q_1, \Omega F F) \vdash_{\mathcal{A}} (d, q_3, \Omega F) \vdash_{\mathcal{A}} (\varepsilon, q_3, \Omega) \vdash_{\mathcal{A}} (\varepsilon, q_3, \varepsilon).$$

$$(bcd, q_0, \Omega) \vdash_{\mathcal{A}} (cd, q_2, \Omega F) \vdash_{\mathcal{A}} (d, q_2, \Omega F) \vdash_{\mathcal{A}} (\varepsilon, q_3, \Omega) \vdash_{\mathcal{A}} \vdash_{\mathcal{A}} (\varepsilon, q_3, \varepsilon).$$

On note $\mathrm{L}(\mathcal{A})$ le langage reconnu, par pile vide, par l'automate $\mathcal{A}$. Répondre par "oui" ou "non" aux questions qui suivent.

1- $a \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$?
2- $d \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$?
3- $ad \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$?
4- $abd \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$?
5- $badd \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$?
6- $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \forall m \in \mathbb{N}, a^n c^m d^n \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$?
7- $\forall n, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N} - \{0\}, a^n c^{m_1} a^n c^{m_2} d^n c^{m_3} d^n \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$?
8- $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = c^* \cdot \mathrm{L}(\mathcal{A})$?
9- $\mathrm{L}(\mathcal{A}) = ac^*(a^{-1}\mathrm{L}(\mathcal{A})) \cup bc^*(b^{-1}\mathrm{L}(\mathcal{A}))$?
10- Il existe des mots $u, v \in \{a, b, c, d\}^+$ tels que $u \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$ et $uv \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$?

Exercice 4 [7 points]

On considère l'alphabet gradué $F := \{f, m, a\}$ où $\mathbf{ar}(f) = 2, \mathbf{ar}(m) = 1, \mathbf{ar}(a) = 0$.

1- Pour chacun des langages L_i suivants ($1 \leq i \leq 4$), donner un automate fini de termes qui reconnaît exactement L_i.

- $L_1 := T(\{m, a\})$
- $L_2 := \{t \in T(F) \mid t$ possède au moins deux occurrences du symbole $f\}$
- $L_3 := \{t \in T(F) \mid t$ possède exactement deux occurrences du symbole $f\}$
- $L_4 := \{t \in T(F) \mid$ la branche la plus à gauche de t est étiquetée par un mot du langage $(ff)^*ma\}$

2- Choisir trois langages parmi les L_i ci-dessus ($1 \leq i \leq 4$) et décrire chacun de ces trois langages par une expression rationnelle.