	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010/2011 2IÈME SESSION DE PRINTEMPS **Parcours :** CSB6 **Code UE :** INF253 **Épreuve :** Informatique Théorique 2 **Date :** 20 Juin 2011 **Heure :** 14 H **Durée :** 3H Documents : autorisés Épreuve de : Mr Géraud Sénizergues	

Le problème et les 2 exercices sont indépendants.
La note obtenue à l'examen, sur 20, est le minimum entre 20 et le total des points obtenus au problème et aux exercices.

PROBLÈME [25 points]

On considère un alphabet fini X auquel on adjoint deux symboles supplémentaires "[" et "]". Cet alphabet augmenté est noté $\hat{X}$:

$$\hat{X} := X \cup \{[,]\}.$$

On note $X^{[2]}$ l'ensemble des mots de la forme :

$$[w_1][w_2]\cdots[w_n] \tag{1}$$

où, $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $i \in [1, n], w_i \in X^*$. On appelle *mot de niveau 2* sur l'alphabet X, tout élément de $X^{[2]}$ Par exemple :

$$[aba][aa][abbbbba][ab], \quad [aa][ab]$$

sont des mots de niveau 2 sur l'alphabet $X = \{a, b\}$. Le cas extrême où $n = 0$ correspond au mot vide ε. Par contre, les mots suivants sur $\hat{X}$:

$$[aba[aa]abbbbba][ab], \quad]aa][ab[, \quad [[a]], \quad aa, \quad [aa[$$

ne sont *pas* des mots de niveau 2 sur l'alphabet $X = \{a, b\}$.
Le produit de deux mots de $X^{[2]}$ est leur produit dans $\hat{X}^*$. Par exemple :

$$[aba][aa][abbbbba][ab] \cdot [aa][ab] = [aba][aa][abbbbba][ab][aa][ab],$$

$$[aba][aa][abbbbba][ab] \cdot \varepsilon = [aba][aa][abbbbba][ab]$$

$$[aba][aa][abbbbba][ab] \cdot [\varepsilon][aa] = [aba][aa][abbbbba][ab][\varepsilon][aa].$$

1- Vérifier que $\langle X^{[2]}, \cdot, \varepsilon\rangle$ est un sous-monoïde de $\langle \hat{X}^*, \cdot, \varepsilon\rangle$.
2- Montrer que $X^{[2]}$ est une partie rationnelle de $\hat{X}^*$.

PARTIE 1 Langages rationnels

On dénote par $\mathrm{RAT1}(X^{[2]})$ l'ensemble des langages $L \subseteq X^{[2]}$ tels que L est une partie rationnelle de $\hat{X}^*$ (au sens étudié en cours). Par exemple :

$$L_1 = ([aab]^* \cdot [ab][ba])^* \in \mathrm{RAT1}(X^{[2]})$$

On définit les langages suivants :

$$\begin{aligned} L_2 &= ([ab])^* \cdot [aba] \cdot ([ba])^* \\ L_3 &= \{([ab])^n [aba]([ba])^n \mid n \geq 0\} \\ L_4 &= ([ab])^* \cdot aba \cdot ([ba])^* \\ L_5 &= [a \cdot (b][a)^* \cdot b][aba][b \cdot (a][b)^* \cdot a] \end{aligned}$$

3- Vérifier que

$$[ab][ab][aba][ba] \in L_2, \quad [ab][ab][aba][ba] \notin L_3, \quad [ab]aba[ba] \in L_4, \quad [ab][ab][aba][ba] \in L_5$$

4- Parmi les langages L_2, L_3, L_4, L_5, lesquels sont inclus dans $X^{[2]}$? lesquels appartiennent à $\mathrm{RAT1}(X^{[2]})$?
On définit maintenant une *expression rationnelle de niveau 2* sur X comme un couple (E, σ) où E est une expression rationnelle sur un alphabet auxiliaire A et $\sigma : \mathcal{P}(A^*) \to \mathcal{P}(X^*)$ est une substitution rationnelle. On note $\pi(E) \subseteq A^*$ la valeur de l'expression E (selon la définition du cours). On appelle valeur de l'expression (E, σ), le langage $\pi_2(E, \sigma)$ formé des mots de niveau 2 de la forme

$$[w_1][w_2]\cdots[w_n] \tag{2}$$

tels que, il existe des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ avec, $a_1 a_2 \cdots a_n \in \pi(E)$ et $\forall i \in [1, n], w_i \in \sigma(\{a_i\})$. On appelle langage rationnel de niveau 2 tout langage qui est la valeur d'une expression rationnelle de niveau 2. On dénote par $\mathrm{RAT2}(X^{[2]})$ l'ensemble des langages $L \subseteq X^{[2]}$ qui sont des langages rationnels de niveau 2.
Exemple :

$$F := ((aa + bb)^* \cdot abab, \sigma); \quad \text{où } \sigma(\{a\}) := x, \;\; \sigma(\{b\}) := y^*$$

Alors

$$aabbaaabab \in \pi((aa + bb)^* \cdot abab) \text{ et}$$

$$[x][x][y][y][x][x][x][y][x][y] \in \pi_2(F)$$

$$[x][x][yyy][y][x][x][x][\varepsilon][x][yy] \in \pi_2(F)$$

5- Pour chacun des mots suivants, déterminer s'il appartient au langage $\pi_2(F)$:

$$[x][x][y][y][x][x][y][y][x][y], \quad [x][x][y][y][x][y][x][y], \quad [x][x][y][y][x][y][x][y][x][y],$$

$$[x][xx][y][y][xx][y][xx][y], \quad [x][x][y][y][x][yy][x][yyy].$$

On dénote par $\mathrm{RAT2}(X^{[2]})$ l'ensemble des langages $L \subseteq X^{[2]}$ qui sont des langages rationnels de niveau 2.
6- Montrer que $\mathrm{RAT2}(X^{[2]}) \subseteq \mathrm{RAT1}(X^{[2]})$.

7- Donner un schéma d'algorithme qui détermine, étant donnés une expression rationnelle de niveau 2 (E, σ) sur un alphabet X et un mot $w \in X^{[2]}$, si $w \in \pi_2(E, \sigma)$?

On souhaite maintenant démontrer que $\mathrm{RAT1}(X^{[2]}) \subseteq \mathrm{RAT2}(X^{[2]})$. Soit $L \in \mathrm{RAT1}(X^{[2]})$. Soit $\mathcal{A}$ un automate fini reconnaissant L :

$$\mathcal{A} = < \hat{X}, Q_-, Q_+, \delta >$$

On dénote par $\mathsf{B}(Q, Q)$ l'ensemble des relations binaires de Q dans Q. On dénote par $\circ$ la composition des relations, au sens suivant : si $h \in \mathsf{B}(Q, Q), h' \in \mathsf{B}(Q, Q)$, la composée $h \circ h' \in \mathsf{B}(Q, Q)$ est définie par

$$(h \circ h') = \{(q, s) \in Q \times Q \mid \exists r \in Q, (q, r) \in h \text{ et } (r, s) \in h'\}.$$

On dénote par Id_Q la relation binaire $\{(q, q) \mid q \in Q\}$.
8- Vérifier que $\langle \mathsf{B}(Q, Q), \circ, \mathrm{Id}_Q \rangle$ est un monoïde.
9- Montrer que l'application $\varphi : \hat{X}^* \to \mathsf{B}(Q, Q)$ définie par

$$\varphi(u) = \{(q, r) \in Q \times Q \mid q \to_{\mathcal{A}}^{u} r\}$$

est un homomorphisme de monoïdes.
10- On considère l'alphabet fini $A := \mathrm{Im}(\varphi)$ et la partie $P_1 := \{h \in A \mid h \cap Q_- \times Q_+ \neq \emptyset\}$. Posons $M_1 := \{w \in A^* \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in A, w = a_1 a_2 \ldots a_n \text{ et } a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n \in P_1\}$. Montrer que M_1 est un langage rationnel sur l'alphabet A.
11- En déduire qu'il existe une expression rationnelle E sur A dont la valeur est M_1.
12- Définir une substitution $\sigma : \mathcal{P}(A^*) \to \mathcal{P}(X^*)$ telle que

$$\pi_2(E, \sigma) = L.$$

13- Montrer que $\mathrm{RAT1}(X^{[2]}) \subseteq \mathrm{RAT2}(X^{[2]})$.

PARTIE 2 Langages algébriques

On dénote par $\mathrm{ALG1}(X^{[2]})$ l'ensemble des langages $L \subseteq X^{[2]}$ tels que L est un langage algébrique de $\hat{X}$ (au sens étudié en cours). Par exemple :

$$L_6 = \{[ab]^n \cdot ([ab][ba])^n \mid n \geq 1\} \in \mathrm{ALG1}(X^{[2]})$$

14- Donner une grammaire algébrique qui engendre L_6.
15- Parmi les langages suivants, lesquels appartiennent à $\mathrm{ALG1}(X^{[2]})$?

$$\begin{aligned}
L_7 &= \{[a^p][b^p] \mid p \in \mathbb{N}\} \\
L_8 &= \{[a^p b^p][a^q b^q][a^r b^r] \mid p, q, r \in \mathbb{N}\} \\
L_9 &= \{[a^{p_1} b^{p_1}][a^{p_2} b^{p_2}] \cdots [a^{p_n} b^{p_n}] \mid n \geq 1, p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}\} \\
L_{10} &= \{[a^p b^q][b^r a^s] \mid p, q, r \in \mathbb{N}, p = q + r\} \\
L_{11} &= \{[a^p [b^p] a^q] \mid p, q \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

On définit maintenant une *grammaire algébrique de niveau 2* sur X comme un couple (G, σ) où G est une grammaire algébrique sur un alphabet terminal auxiliaire A et $\sigma : \mathcal{P}(A^*) \to \mathcal{P}(X^*)$

est une substitution algébrique. On appelle langage (de niveau 2) engendré par la grammaire $F = (G, \sigma)$ le langage $\mathrm{L_F}$ formé des mots de niveau 2 de la forme

$$[w_1][w_2]\cdots[w_n] \tag{3}$$

tels que, il existe des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ avec, $a_1a_2\cdots a_n \in \mathrm{L_G}$ et $\forall i \in [1, n], w_i \in \sigma(\{a_i\})$. On appelle langage algébrique de niveau 2 tout langage qui est engendré par une grammaire algébrique de niveau 2. On dénote par $ALG2(X^{[2]})$ l'ensemble des langages $L \subseteq X^{[2]}$ qui sont des langages algébriques de niveau 2.
Exemple :
$F := (G, \sigma);$ où

$$G = \langle \{a, b\}, \{S\}, P, S\rangle$$

où P est constitué des règles :

$$S \to aS \;\;+\;\; aSb \;\;+\;\; \varepsilon$$

$$\sigma(\{a\}) := x,\;\; \sigma(\{b\}) := y^*$$

Alors

$$aaabb \in L_G \text{ et}$$

$$[x][x][x][y][y] \in \mathrm{L_F}$$

$$[x][x][x][yyy][yyyyy] \in \mathrm{L_F}$$

16- Pour chacun des mots suivants, déterminer s'il appartient au langage engendré par la grammaire F de l'exemple ci-dessus :

$$[x][x][y][y][x][x][y][y][x][y],\;\; [x][x][y][y][x][y][x][y],\;\; [x][x][y][y][x][y][x][y][x][y],$$
$$[x][xx][y][y][xx][y][xx][y],\;\; [x][x][y][y][x][yy][x][yyy].$$

On dénote par $\mathrm{ALG2}(X^{[2]})$ l'ensemble des langages $L \subseteq X^{[2]}$ qui sont des langages algébriques de niveau 2.
17- Montrer que $L_9 \in \mathrm{ALG2}(X^{[2]})$.
18- Montrer que $\mathrm{ALG2}(X^{[2]}) \subseteq \mathrm{ALG1}(X^{[2]})$.
19- Donner un schéma d'algorithme qui détermine, étant donnés une grammaire algébrique de niveau 2 $F = (G, \sigma)$ sur l'alphabet terminal X et un mot $w \in X^{[2]}$, si $w \in \mathrm{L_F}$?

PARTIE 3 Miroirs

On rappelle que le *miroir* d'un mot

$$w = x_1x_2\cdots x_n$$

où $x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ est le mot

$$\tilde{w} := x_n\cdots x_2x_1$$

On définit sur les mots de niveau 2 deux applications analogues, notées MIR1, MIR2 et définies par : pour tout

$$w = [w_1][w_2]\cdots[w_n]$$

où $w_1, w_2, \dots w_n \in X^*$,

$$\mathrm{MIR1}(w) = [\tilde{w}_1][\tilde{w}_2]\cdots[\tilde{w}_n]$$

$$\mathrm{MIR2}(w) = [w_n]\cdots[w_2][w_1]$$

Exemples : si $w = [ab][abb][abbb][abab]$ alors

$$\mathrm{MIR1}(w) = [ba][bba][bbba][baba], \quad \mathrm{MIR2}(w) = [abab][abbb][abb][ab]$$

20- Montrer que $\mathrm{RAT2}(X^{[2]})$ est clos par MIR1 i.e., pour tout langage $L \in \mathrm{RAT2}(X^{[2]})$, le langage $\{\mathrm{MIR1}(w) \mid w \in L\}$ appartient aussi à $\mathrm{RAT2}(X^{[2]})$.
21- Montrer que $\mathrm{RAT2}(X^{[2]})$ est clos par MIR2.
22- $\mathrm{ALG2}(X^{[2]})$ est-il clos par MIR1 ? par MIR2 ?
On examine maintenant le problème de la clôture de $\mathrm{ALG1}(X^{[2]})$ par MIR1
Posons :

$$L_{12} := \{[a^p b^q][c^q][d^p] \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}.$$

23- Montrer que $L_{12} \in \mathrm{ALG1}(X^{[2]})$.
24- Montrer que $\mathrm{MIR1}(L_{12}) \notin \mathrm{ALG1}(X^{[2]})$.
25- Que peut-on en conclure sur les ensembles de langages $\mathrm{ALG1}(X^{[2]})$ et $\mathrm{ALG2}(X^{[2]})$?

Exercice 1 [4 points]
Considérons l'alphabet gradué $F = \{f, m, a, b\}$ avec $\mathbf{ar}(f) = 2, \mathbf{ar}(m) = 1, \mathbf{ar}(a) = \mathbf{ar}(b) = 0$.
On considère les langages de termes suivants :

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{t \in T(F) \mid \exists u, v_1, v_2 \in \mathrm{dom}(t), u \preceq v_1, u \preceq v_2, \text{ et } t(u) = m, t(v_1) = a, t(v_2) = b\}. \\ L_2 &:= \{t \in T(F) \mid \exists u, v \in \mathrm{dom}(t), t(u) = t(v) = a \text{ et } u \neq v\}. \end{aligned}$$

1- L_1 est-il reconnaissable ? (justifier la réponse)
2- L_2 est-il reconnaissable ? (justifier la réponse).

Exercice 2 [4 points]
1- Écrire une formule MSO Φ, sur la signature $\{S, P_a, P_b\}$, telle que

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid w \models \Phi\} = a^*ba^*ba^*.$$

2- Écrire une formule MSO Ψ, sur la signature $\{S, P_a, P_b\}$, telle que

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid w \models \Psi\} = (abb + baa)^*$$