	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2008/2009 1ÈRE SESSION DE PRINTEMPS **Parcours :** CSB6 **Code UE :** INF253 **Épreuve :** Informatique Théorique 2 **Date :** Juin 2009 **Heure :** H **Durée :** 3H Documents : autorisés Épreuve de : Mr Géraud Sénizergues	

Les deux exercices et le problème sont indépendants. La note obtenue, sur 20, est le minimum entre 20 et le total des points obtenus.

Exercice 1 [5 points]

1- Calculer l' automate déterministe complet minimal du langage $aaa\{a,b\}^*$.
2- Calculer l' automate déterministe complet minimal du langage $\{a,b\}^*aaa$.
3- Existe-t-il un automate fini (éventuellement non-déterministe) à quatre états reconnaissant $\{a,b\}^*aaa$?
4- Existe-t-il un automate fini (éventuellement non-déterministe) à trois états reconnaissant $\{a,b\}^*aaa$?
5- Quel est le nombre d' états minimum d'un automate fini non-déterministe reconnaissant $\{a,b\}^*aaa$?

Exercice 2 [5 points]

Attention : dans cet exercice, chaque réponse correcte apporte 0,5 point, chaque réponse fausse retranche 0,5 point, chaque absence de réponse apporte 0 point. La note obtenue à cet exercice, sur 5, est le maximum entre 0 et le total obtenu.
On considère les langages suivants :

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}, \quad L_2 = \{a^n b^m \mid n > m \geq 0\}, \quad L_3 = \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$
$$L_4 = \{a^p b^q c^r \mid p = q = r \geq 0\}, \quad L_5 = \{a^p b^q c^r \mid p > q \geq 0 \text{ ou } q > r \geq 0\},$$

1- L_1 est-t-il algébrique ? L_1 est-t-il rationnel ?
2- L_2 est-t-il algébrique ? L_2 est-t-il rationnel ?
3- L_3 est-t-il algébrique ? L_3 est-t-il rationnel ?
4- L_4 est-t-il algébrique ? L_4 est-t-il rationnel ?
5- L_5 est-t-il algébrique ? L_5 est-t-il rationnel ?

Problème [20 points]

Le but du problème est de montrer que les langages algébriques peuvent être décrits par des expressions “substitutionnelles” (S-expressions, en abrégé) qui sont analogues aux expressions rationnelles.

Partie I

Soient $X = \{a, b, c, \ldots\}$ un alphabet fini et $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots\}$ un ensemble dénombrable de variables. Pour toute variable $v \in V$ et tout langage $L \in \mathcal{P}((X \cup V)^*)$, nous dénoterons par $\{v \leftarrow L\}$ l'unique substitution $\Phi : \mathcal{P}((X \cup V)^*) \to \mathcal{P}((X \cup V)^*)$ telle que :

$$\Phi(\{v\}) = L \text{ et } \forall y \in (X \cup V) - \{v\}, \Phi(\{y\}) = \{y\}.$$

On définit, pour chaque variable $v \in V$ une opération binaire $\circ_v$, des opérations unaires (n, v) (pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$) et une opération unaire $*_v$ sur $\mathcal{P}((X \cup V)^*)$ par : pour tous $L, L' \in \mathcal{P}((X \cup V)^*)$,
OP1- $L \circ_v L' := L\{v \leftarrow L'\}$
OP2- $L^{(0,v)} := \{v\}, L^{(n+1,v)} := L \circ_v L^{(n,v)}$
OP3- $L^{*_v} := \bigcup_{n\geq 0}(L \cup \{v\})^{(n,v)}$
Par exemple :
$\{avb\} \circ_v \{bb\} = \{abbb\}, \{avbv\} \circ_v \{bb, c\} = \{abbbbb, abbbc, acbbb, acbc\}$
1- Que valent les expressions : $\{avb\} \circ_v \{avb\}$, $\{avb\} \circ_v \{avb, c\}$, $\{avb, v\} \circ_v \{avb, v\}$?
2- Montrer que $\{avb\}^{*_v} = \{a^n v b^n \mid n \geq 0\}$.
3- Que valent les expressions : $\{avb\}^{*_v} \circ_v \{ab\}$, $\{avb\}^{*_v} \circ_v \{\varepsilon\}$?
4- Décrire le langage $\{avbb\}^{*_v} \circ_v \{\varepsilon\}$. Donner une grammaire algébrique pour ce langage.
5- Décrire le langage $\{avb, avbb\}^{*_v} \circ_v \{\varepsilon\}$. Donner une grammaire algébrique pour ce langage.
6- Décrire le langage $\{ucu' \mid u, u' \in \{a, b\}^*, u' \text{ est le miroir de } u\}$ par une expression de la forme $F^{*_v} \circ_v \{c\}$, où F est une partie finie de $(\{a, b\} \cup V)^*$.

Partie II

Dans cette partie, on montre que tout langage algébrique de mots est descriptible par une S-expression, c'est à dire une expression utilisant comme opérandes les ensembles finis de mots de $(X \cup V)^*$ et utilisant les opérateurs $\cup$, $\circ_v$, $*_v$ (où $v \in V$).
Soit $G = \langle X, N, P, S\rangle$ une grammaire algébrique. On suppose que P est formé de n règles $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$. On munit l'ensemble P d' une arité $\mathbf{ar} : P \to \mathbb{N}$ de la façon suivante : si π est une règle de la forme

$$\pi : S_0 \to u_0 S_1 u_1 \cdots S_k u_k \tag{1}$$

où $S_0, S_1, \ldots, S_k \in N$, $u_0, u_1, \ldots u_k \in X^*$, alors $\mathbf{ar}(\pi) = k$. Autrement dit, l'arité de π est le nombre d'occurrences de symboles non-terminaux dans son membre droit.
Exemple : $G = \langle\{a, b, c, d\}, \{S, T\}, \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}, S\rangle$, où

$$\begin{array}{lll}
\pi_1 : & S \to & aSSb \\
\pi_2 : & S \to & TT \\
\pi_3 : & T \to & cT \\
\pi_4 : & T \to & c \\
\pi_5 : & S \to & d
\end{array}$$

alors $\mathbf{ar}(\pi_1) = 2, \mathbf{ar}(\pi_2) = 2, \mathbf{ar}(\pi_3) = 1, \mathbf{ar}(\pi_4) = 0, \mathbf{ar}(\pi_5) = 0$. L'ensemble P muni de $\mathbf{ar}$ est maintenant un alphabet gradué et l'on dénote par $\mathrm{T}(P)$ l'ensemble des termes sur cet alphabet. Par exemple $\pi_1(\pi_2(\pi_4, \pi_4), \pi_1(\pi_5, \pi_5)) \in \mathrm{T}(P)$. On définit une P-algèbre de domaine $(X \cup V)^*$,

$$\mathcal{M} = \langle (X \cup V)^*, (\pi^{(\mathcal{M})})_{\pi \in P}\rangle$$

en posant, pour toute règle π de la forme (1) et tout $w_1, w_2, \ldots, w_k \in (X \cup V)^*$

$$\pi^{(\mathcal{M})}(w_1, w_2, \ldots, w_k) = u_0 \cdot w_1 \cdot u_1 \cdots w_k \cdot u_k.$$

Exemple (continué) :

$$\pi_1^{(\mathcal{M})}(d,d) = addb,\ \ \pi_1^{(\mathcal{M})}(ab,aa) = aabaab, \pi_2^{(\mathcal{M})}(ab,aa) = abaa,\ \ \pi_3^{(\mathcal{M})}(ab) = cab,$$

$$\pi_2^{(\mathcal{M})}(av_0,av_1) = av_0av_1,\ \ \pi_3^{(\mathcal{M})}(v_1v_1) = cv_1v_1,\ \ \pi_4^{(\mathcal{M})} = c,\ \ \pi_5^{(\mathcal{M})} = d.$$

7- Que valent

$$\pi_1^{(\mathcal{M})}(c,d),\ \ \pi_2^{(\mathcal{M})}(c,d),\ \ \pi_3^{(\mathcal{M})}(aba)?$$

8- Soit I l'unique homomorphisme de P-algèbres de $\mathrm{T}(P,V)$ dans $\mathcal{M}$ tel que, $\forall v \in V, I(v) = v$. Dans l'exemple précédent, que valent :

$$I(\pi_1(\pi_4,\pi_5)),\ \ I(\pi_2(\pi_4,\pi_5)),\ \ I(\pi_1(\pi_2(\pi_4,\pi_4),\pi_1(\pi_5,\pi_5)))?$$

Pour toute règle π de la forme (1) on définit :

$$g(\pi) = S_0 \text{ et } d(\pi) = S_1S_2\cdots S_k.$$

Exemple (continué) :

$$g(\pi_1) = S, d(\pi_1) = SS, g(\pi_2) = S, d(\pi_2) = TT, g(\pi_3) = T, d(\pi_3) = T,$$

$$g(\pi_4) = T, d(\pi_4) = \varepsilon, g(\pi_5) = S, d(\pi_5) = \varepsilon.$$

On dit que $t \in \mathrm{T}(P)$ est un *arbre de construction* de la grammaire G si, pour tout $u \in \mathrm{dom}(t)$ tel que $\mathbf{ar}(t(u)) = k$, on a bien

$$d(t(u)) = g(t(u0)) \cdot g(t(u1)) \cdots g(t(u(k-1))).$$

Exemple (continué) :
Le terme $t_1 = \pi_1(\pi_2(\pi_4,\pi_4),\pi_1(\pi_5,\pi_5))$ est un arbre de construction. Le terme $t_2 = \pi_1(\pi_4,\pi_4)$ n'est pas un arbre de construction car

$$d(t_2(\varepsilon)) = d(\pi_1) = SS \text{ alors que } g(t_2(0))g(t_2(1)) = g(\pi_4)g(\pi_4) = TT.$$

9- Parmi les termes suivants, lesquels sont des arbres de construction de la grammaire G de l'exemple : $\pi_1(\pi_4,\pi_5),\ \ \pi_1(\pi_5,\pi_5),\ \ \pi_5,\ \ \pi_1(\pi_1(\pi_5,\pi_5),\pi_2(\pi_4,\pi_4))$?
10- Montrer que, pour tout $w \in X^*$, w appartient à L_G ssi il existe un arbre de construction t (de la grammaire G) tel que $w = I(t)$.
11- Soit $w = aaddbccb$. Donner un arbre de construction t de la grammaire G de l' exemple, tel que $w = I(t)$.
12- Montrer que l'ensemble $C(G)$ des arbres de construction de la grammaire G est un langage reconnaissable de termes.
13- Soient $T_1, T_2 \subseteq \mathrm{T}(P,V)$. Monter que $I(T_1 \circ_v T_2) = I(T_1) \circ_v I(T_2)$.
14- En déduire que $I(T_1^{*_v}) = (I(T_1))^{*_v}$.
15- Montrer que, pour toute grammaire algébrique G, le langage L_G peut être décrit par une S-expression.

Partie III

Dans cette partie, on montre que tout langage de mots descriptible par une S-expression est algébrique.

Soit F un alphabet gradué tel que l'ensemble des symboles d'arité 0 de F est exactement X. L'application fr, qui à un terme associe le mot formé par ses feuilles, est une application de $\mathrm{T}(F,V)$ dans $(X \cup V)^*$.

16- Montrer que, pour tous langages $T_1, T_2 \subseteq \mathrm{T}(F,V)$, $\mathrm{fr}(T_1 \circ_v T_2) = \mathrm{fr}(T_1) \circ_v \mathrm{fr}(T_2)$.

17- En déduire que, $\mathrm{fr}(T_1^{*v}) = (\mathrm{fr}(T_1))^{*v}$.

18- Montrer que, si $L \subseteq (X \cup V)^*$ est décrit par une S-expression, alors il existe un alphabet gradué F et un langage $T_1 \subseteq \mathrm{T}(F,V)$, tel que T_1 est décrit par une expression rationnelle (de termes) et $L = \mathrm{fr}(T_1)$.

19- Montrer que, si $T_1 \subseteq \mathrm{T}(F,V)$ est reconnaissable, alors $\mathrm{fr}(T_1)$ est un langage algébrique de mots.

20- Montrer que, si $L \subseteq (X \cup V)^*$ est décrit par une S-expression, alors L est algébrique.