	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007/2008 2ÈME SESSION DE PRINTEMPS **Parcours :** CSB6 **Code UE :** INF253 **Épreuve :** Informatique Théorique 2 **Date :** Juin 2008 **Heure :** H **Durée :** 1H30 Documents : autorisés Épreuve de : Mr Géraud Sénizergues	

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1 [5 points]

Attention : dans cet exercice, chaque réponse correcte apporte 0,5 point, chaque réponse fausse retranche 0,5 point, chaque absence de réponse apporte 0 point.

On considère l'automate à pile $\mathcal{A} := \langle \{a, b, c, d\}, \{\Omega, F\}, \{q_0, q_1\}, \Omega, q_0, \lambda \rangle$ où λ est constitué des transitions

$$
\begin{array}{ccc}
(q_0, \Omega) & \xrightarrow{a} & (q_0, \Omega F) \\
(q_0, F) & \xrightarrow{a} & (q_0, FF) \\
(q_0, F) & \xrightarrow{b} & (q_1, \varepsilon) \\
(q_1, F) & \xrightarrow{b} & (q_1, \varepsilon) \\
(q_0, \Omega) & \xrightarrow{d} & (q_1, \varepsilon) \\
(q_1, \Omega) & \xrightarrow{d} & (q_1, \varepsilon) \\
(q_0, \Omega) & \xrightarrow{c} & (q_0, \Omega) \\
(q_1, \Omega) & \xrightarrow{c} & (q_1, \Omega) \\
(q_0, F) & \xrightarrow{c} & (q_0, F) \\
(q_1, F) & \xrightarrow{c} & (q_1, F).
\end{array}
$$

Répondre par "oui" ou "non" aux questions qui suivent.

1- $a \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$
2- $d \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$
3- $aabbd \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$
4- $\forall n \in \mathbb{N}, a^n b^n d \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$
5- $cccaacccbbcccd \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$
6- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, c^m a^n c^m b^n c^m d \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$
7- $\forall n, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}, c^{m_1} a^n c^{m_2} b^n c^{m_3} d \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$
8- $\mathrm{L}(\mathcal{A}) \subseteq \{c^m a^n c^m b^n c^m d \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$
9- $\mathrm{L}(\mathcal{A}) \subseteq \{c^{m_1} a^n c^{m_2} b^n c^{m_3} d \mid n, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}\}$
10- $(\{a, b, c, d\}^* - \mathrm{L}(\mathcal{A}))$ est un langage algébrique.

Exercice 2 [5 points]
Pour chacun des langages L_i suivants ($1 \leq i \leq 5$), répondre aux deux questions : L_i est-il rationnel ? L_i est-il algébrique ? Justifier chaque réponse en une ou deux lignes.

- $L_1 := \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0, n \leq m\}$
- $L_2 := \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0, n \leq 2m\}$
- $L_3 := \{a^n b^m c^n \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
- $L_4 := \{a^n b^m c^p \mid n \geq 0, m \geq 0, p \geq 0\}$
- $L_5 := \{a^n b^m c^p d^q \mid n \geq 0, m \geq 0, p \geq 0, q \geq 0, n + m + p = q\}$

Exercice 3 [7 points]
On considère l'alphabet gradué $F := \{f, m, a\}$ où $\mathbf{ar}(f) = 2, \mathbf{ar}(m) = 1, \mathbf{ar}(a) = 0$. On rappelle que $T(F, \{v\}) = \{f(v, v).m(v), a\}^{*v}$.
1- Pour chacun des langages K_i suivants ($1 \leq i \leq 3$), donner une expression rationnelle de termes qui décrit exactement le langage K_i.
- $K_1 := T(F)$
- $K_2 := T(\{f, a\})$
- $K_3 := T(F, \{v, w\})$

2- On rappelle qu'un *contexte* C sur l'alphabet F est un élément de $T(F, \{\bullet\})$ qui contient exactement une occurrence de la variable $\bullet$. On dénote par $\mathcal{C}_1(F)$ l'ensemble des contextes sur l'alphabet F. On considère les langages R_1, R_2 suivants :

$$\begin{aligned} R_1 &:= \{f(v, v), m(v), a\}^{*v} \circ_v \{a, \bullet\} \\ R_2 &:= \{f(a, v), f(v, a), m(v)\}^{*v} \circ_v \{\bullet\} \end{aligned}$$

2.1- Est-il vrai que $R_1 \subseteq \mathcal{C}_1(F)$? que $R_1 \supseteq \mathcal{C}_1(F)$?
2.2- Est-il vrai que $R_2 \subseteq \mathcal{C}_1(F)$? que $R_2 \supseteq \mathcal{C}_1(F)$?
3- Donner une expression rationnelle pour $\mathcal{C}_1(F)$.
4- Donner une expression rationnelle pour le langage K_4 défini par :

$$K_4 := \{t \in T(F) \mid t \text{ a exactement une occurrence du symbole } m\}.$$

Exercice 4 [12 points]
On appelle *Grammaire algébrique à Membre droit Unique* (GMU, en abbrégé), une grammaire algébrique $G = \langle X, V, P, S\rangle$ telle que, pour toute variable $v \in V$, il existe un unique mot $m \in (X \cup V)^*$ tel que $(v, m) \in P$.
1- Montrer que le langage engendré par une GMU est soit vide soit réduit à un seul mot.
2- On considère les deux exemples suivants : $G_1 =< \{a, b\}, \{v_0, v_1, v_2, v_3\}, P_1, \{v_0\} >$ où P_1 est constitué des règles

$$v_0 \rightarrow v_1 v_2, \quad v_1 \rightarrow v_1 v_0, \quad v_2 \rightarrow v_3 v_3, \quad v_3 \rightarrow a$$

$G_2 =< \{a, b\}, \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}, P_2, \{v_0\} >$ où P_2 est constitué des règles

$$v_0 \rightarrow v_1 v_2, \quad v_1 \rightarrow v_2 v_2, \quad v_2 \rightarrow v_3 v_4, \quad v_3 \rightarrow a, \quad v_4 \rightarrow b$$

Décrire les langages $\mathrm{L}_{G_1}, \mathrm{L}_{G_2}$.

On appelle *description grammaticale* (DG, en abbrégé) toute GMU vérifiant les deux conditions supplémentaires :

$$\mathrm{L}_G \neq \emptyset \tag{1}$$

$$\forall (v, m) \in P, m \in V \cdot V \text{ ou } m \in X. \tag{2}$$

On note $\|G\|$ le nombre de variables de G (i.e. $Card(V)$).
3- Montrer que l'on peut déterminer en temps polynomial si une GMU G vérifie les deux conditions (1),(2) ci-dessus.

Etant donnée une DG G, et une variable $v \in V$, on dénote par $W(G, v)$ l'unique élément de $\mathrm{L}_G(v)$. On pose $W(G) := W(G, v)$ où v est l'axiome de G.
4- Majorer $|W(G)|$ en fonction de $\|G\|$.(On s' efforcera de donner un majorant aussi petit que possible).
5- Pour tout n on définit la DG $T_n := \langle \{a, b\}, \{v_0, \bar{v}_0, v_1, \bar{v}_1, \ldots, v_n, \bar{v}_n\}, P_n, v_0\rangle$ où

$$P_n := \bigcup_{0 \leq i < n} \{v_i \rightarrow v_{i+1} \bar{v}_{i+1}, \bar{v}_i \rightarrow \bar{v}_{i+1} v_{i+1}\} \cup \{v_n \rightarrow a, \bar{v}_n \rightarrow b\}.$$

Calculer $W(T_n)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Calculer $|W(T_n)|$ en fonction de n.
6- Donner une méthode, aussi rapide que possible, pour calculer les nombres $|W(G, v)|$ pour toutes les variables $v \in V$ d'une Description Grammaticale G quelconque. Déterminer si votre méthode est polynomiale en fonction de $\|G\|$.
On peut voir une DG G comme une forme *compressée* du mot $W(G)$. On se demande maintenant si l'on peut tester les propriétés du mot $W(G)$ efficacement à partir de G.
7- Soit R un rationnel de X^* donné par un automate fini $\mathcal{A} =< X, Q, \{d\}, Q_+, \delta >$. On appelle taille de $\mathcal{A}$ le nombre $\|\mathcal{A}\| := Card(Q) + Card(\delta)$. Donner une méthode, aussi rapide que possible, pour tester si $W(G) \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$. Déterminer si votre méthode est polynomiale en fonction des nombres $\|\mathcal{A}\|, \|G\|$.
8- Soit $u \in X^*$.
8.1- Donner une méthode, aussi rapide que possible, pour tester si u est un facteur de $W(G)$. Déterminer si votre méthode est polynomiale en fonction des nombres $|u|, \|G\|$.
8.2- Montrer que, si u est facteur de $W(G)$, alors il existe une DG G', de taille $\|G'\| \leq 3\|G\|$ telle que $W(G') = u$.
Rappel : le mot v est *facteur* du mot w ssi, il existe des mots α, β tels que $w = \alpha \cdot v \cdot \beta$.