	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007/2008 1ÈRE SESSION DE PRINTEMPS **Parcours :** CSB6 **Code UE :** INF253 **Épreuve :** Informatique Théorique 2 **Date :** Jeudi 24 Avril 2008 **Heure :** 14H **Durée :** 1H30 Documents : autorisés Épreuve de : Mr Géraud Sénizergues	

Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1 [5 points]
On considère l'alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ et un alphabet de non-terminaux $V := \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$. Soit la grammaire algébrique $G := \langle \Sigma, V, R, S_1 \rangle$, dont l'ensemble de règles est défini par :

$$R := \begin{cases} S_1 & \rightarrow & S_2S_3 \, + \, S_1S_1S_1 \, + \, S_4 \\ S_2 & \rightarrow & S_2S_2 \, + \, S_1S_5 \, + \, b \, + \, \epsilon \\ S_3 & \rightarrow & S_3S_4 \, + \, S_1S_3S_1 \\ S_4 & \rightarrow & S_4S_4 \, + \, a \\ S_5 & \rightarrow & S_4S_5 \, + \, S_2a \end{cases}$$

1- Donner une grammaire *propre* et *réduite* engendrant le même langage que G.
2- Quel est le langage engendré par G ?

Exercice 2 [5 points]
1- Donner une grammaire algébrique qui engendre le langage suivant :

$$L_1 := \{u\#v \mid u, v \in \{a, b\}^*, v = \tilde{u}\}$$

(où $\tilde{u}$ dénote l'image miroir de u).
2- Montrer que le langage suivant est algébrique :

$$\begin{aligned} L_2 \quad := \quad & \{u_1\#u_2\# \cdots \#u_n \mid n \geq 2, \forall i \in [1, n], u_i \in \{a, b\}^* \text{ et} \\ & \exists i, j \in [1, n], i < j, u_j = \tilde{u_i}\}. \end{aligned}$$

Exercice 3 [5 points]
Pour chacun des langages K_i suivants ($1 \leq i \leq 5$), répondre aux deux questions : K_i est-il rationnel ? K_i est-il algébrique ? Justifier chaque réponse en une ou deux lignes.

- $K_1 := \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
- $K_2 := \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- $K_3 := \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $K_4 := \{a^n b^n c^n d^n \mid n \geq 0\}$
- $K_5 := \{a^n b^n c^m d^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

Exercice 4 [5 points]
On considère l'alphabet gradué $F := \{f, m, a\}$ où $\mathbf{ar}(f) = 2, \mathbf{ar}(m) = 1, \mathbf{ar}(a) = 0$. Pour chacun des langages L_i suivants ($3 \leq i \leq 7$), donner un automate fini de termes qui reconnaît exactement L_i.

- $L_3 := T(F)$
- $L_4 := T(\{f, a\})$
- $L_5 := \{t \in T(F) \mid t$ possède exactement une occurrence du symbole $m\}$
- $L_6 := \{t \in T(F) \mid$ la branche la plus à gauche de t est étiquetée par un mot du langage $(fm)^*a\}$
- L_7 est l'ensemble des termes de la forme $C[f(v, m(v))]\sigma$ pour un contexte $C \in \mathcal{C}_1(F)$ et une substitution de termes $\sigma : T(F, \{v\}) \to T(F)$.

Exercice 5 [5 points]
1- Soit

$$L := \{a, b\}^* aba$$

Ecrire une formule MSO Φ sur la signature $\{S, P_a, P_b\}$ telle que $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \models \Phi\}$.
2- On considère la formule MSO

$$\Psi := \forall x \cdot \forall y \cdot [P_a(x) \wedge S(x, y) \to P_b(y)] \wedge [P_b(x) \wedge S(x, y) \to P_a(y)]$$

Donner une expression rationnelle pour le langage $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \models \Psi\}$.
3- On considère la formule MSO

$$\begin{aligned} \Theta \quad := \quad & \exists X_1 \cdot \exists X_2 \cdot \forall x \cdot \forall y \cdot \\ & [x \in X_1 \vee x \in X_2] \wedge [\neg(x \in X_1) \vee \neg(x \in X_2)] \wedge \\ & [(x \in X_1 \to P_a(x)) \wedge (x \in X_2 \to P_b(x))] \wedge \\ & [(x \in X_1 \wedge S(x, y)) \to y \in X_2] \wedge \\ & [(x \in X_2 \wedge S(x, y)) \to y \in X_1] \end{aligned}$$

Donner une expression rationnelle pour le langage $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \models \Theta\}$.