Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 1, 2010/2011

# INFOT2 : DS

**Durée : 1H 30**
**Tous documents autorisés. Les exercices sont indépendants.**
**La note obtenue, sur 20, est le minimum entre 20 et le total des points obtenus.**

**Exercice 1** [12 points]
Considérons un automate fini

$$\mathcal{A} = \langle X, Q, D, A, \delta \rangle \tag{1}$$

et le langage $L$ reconnu par $\mathcal{A}$. On introduit les notations suivantes : pour tous états $q, q' \in Q$ et tout mot $u \in X^*$,

$$q \rightarrow^u q'$$

signifie qu'il existe un chemin dans $\mathcal{A}$, partant de l'état $q$, finissant dans l'état $q'$, et de trace $u$. On pose alors :

$$L(q, q') := \{u \in X^* \mid q \rightarrow^u q'\}.$$

1- Parmi les formules suivantes, lesquelles sont-elles toujours vraies ? :

$$L = \bigcup_{q \in D, q' \in A} L(q, q') \tag{2}$$

$$L = \bigcup_{q \in Q, q' \in Q} L(q, q') \tag{3}$$

$$L = \bigcup_{q \in D, r \in Q, s \in A} L(q, r) \cdot L(r, s) \tag{4}$$

2- Pour tout langage $M \subseteq X^*$, on définit

$$C_2(M) := \{u_2 \cdot u_1 \mid u_1, u_2 \in X^*, u_1 \cdot u_2 \in M\}.$$

Par exemple :
si $X = \{a, b, c\}$ et $M = \{abcaa\}$ alors $C_2(M) = \{abcaa, bcaaa, caaab, aaabc, aabca\}$
si $X = \{a, b, c\}$ et $M = \{abc, bb\}$ alors $C_2(M) = \{abc, bca, cab, bb\}$
si $X = \{a, b, c\}$ et $M = (ab)^*c$ alors $C_2(M) = (ab)^*c(ab)^* + b(ab)^*c(ab)^*a$
Décrire, par des expressions rationnelles, les langages :

$$C_2((abc)^*d), \quad C_2((ab)^*(cd)^*).$$

3- Étant donné un automate fini $\mathcal{A}$ , et le langage $L$ reconnu par $\mathcal{A}$, on cherche à exprimer $C_2(L)$ à partir des langages L(q,q'). Parmi les formules suivantes lesquelles sont-elles toujours vraies ? :

$$C_2(L) = \bigcup_{q\in D, r\in Q, s\in A} L(q,r)\cdot L(r,s) \tag{5}$$
$$C_2(L) = \bigcup_{q\in D, r\in Q, s\in A} L(r,s)\cdot L(q,r) \tag{6}$$
$$C_2(L) = \bigcup_{q\in D, q'\in A} L(q',q) \tag{7}$$

4- Montrer que, si $L$ est un langage reconnu par un a.f. $\mathcal{A}$, alors $C_2(L)$ est rationnel.
5- Pour tout langage $M \subseteq X^*$, on définit

$$C_3(M) := \{u_3\cdot u_2\cdot u_1 \mid u_1,u_2,u_3\in X^*, u_1\cdot u_2\cdot u_3\in M\}.$$

Par exemple :
si $X=\{a,b,c\}$ et $M=\{abc\}$ alors $C_3(M)=\{abc, cab, bca, cba\}$
Décrire les langages :

$$C_3(\{abc, bb\}),\quad C_3(\{abcd\}).$$

6- Montrer que, si $L$ est un langage reconnu par un a.f. $\mathcal{A}$, alors $C_3(L)$ est rationnel.
7- On rappelle que, pour tout entier $n\geq 1$, $\mathcal{S}_n$ désigne le groupe des permutations de $[1,n]$. Pour tout langage $M\subseteq X^*$, on définit

$$C(M) := \{u_{\sigma(1)}\cdot u_{\sigma(2)}\cdots u_{\sigma(n)} \mid n\geq 1, \sigma\in\mathcal{S}_n, u_1,u_2,\ldots,u_n\in X^*, u_1\cdot u_2\cdots u_n\in M\}.$$

Par exemple :
si $X=\{a,b,c\}$ et $M=\{abc\}$ alors $C(M)=\{abc, cab, bca, cba, acb, bac\}$
Décrire les langages

$$C(a^*\cdot b^*),\quad C((ab)^*).$$

8- Est-il vrai que, si $L$ est un langage reconnu par un automate fini $\mathcal{A}$, alors $C(L)$ est rationnel ?

## Exercice 2 [5 points]

On considère l'alphabet $X := \{x,y\}$. Soit la grammaire algébrique

$$G := \langle X, \{S_0,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6,S_7\}, P, S_0\rangle,$$

dont l'ensemble de règles est défini par :

$$P = \left\{\begin{array}{lcl}
S_0 & \to & S_1S_2S_3 \ + \ S_4S_5 \ + \ xS_6 \ + \ yS_7S_7\\
S_1 & \to & S_1S_2S_1 \ + \ S_3S_6 \ + \ S_4S_7 \ + \ S_2S_2\\
S_2 & \to & \varepsilon \ + \ xS_0S_1 \ + \ yS_2S_5 \ + \ x\\
S_3 & \to & xS_4 \ + \ yS_0S_1 \ + \ xS_3S_3S_3\\
S_4 & \to & xS_5S_4 \ + \ yS_7S_4 \ + \ S_5S_5\\
S_5 & \to & xS_4S_5S_4 \ + \ S_4S_4\\
S_6 & \to & \varepsilon \ + \ S_1S_5S_5 \ + \ xS_1S_6 \ + \ yS_3S_3\\
S_7 & \to & S_4S_5 \ + \ xS_7 \ + \ yS_4
\end{array}\right.$$

On note $L$ le langage engendré par cette grammaire.
1- Quelles variables engendrent-elles un langage non-vide ?
2- $L$ est-il vide ?
3- Donner une grammaire réduite qui engendre $L$.
4- $L$ possède-t-il le mot vide ?
5- Donner une grammaire *propre et réduite* engendrant le langage $L - \{\varepsilon\}$.

**Exercice 3** [5 points]
On considère l'alphabet terminal $X := \{a, b, c\}$. Pour chacun des langages suivants sur $X$, donner une grammaire algébrique qui l'engendre :

$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{a^p b^q c^r \mid p, q, r \in \mathbb{N}, p + q > r\} \\ L_2 & := & \{a^p b^q c^r \mid p, q, r \in \mathbb{N}, p + q < r\} \\ L_3 & := & \{a^p b^q c^r \mid p, q, r \in \mathbb{N}, p + q \neq r\}. \end{array}$$

**Exercice 4** [6 points]
Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. N.B. on ne demande pas de *justification.*
**Barème** : Chaque bonne réponse apporte un demi-point, chaque mauvaise réponse enlève un demi-point, chaque absence de réponse apporte zéro points. La note finale est le maximum entre 0 et le total obtenu.

1. Tout langage algébrique est rationnel.
2. Tout langage rationnel est algébrique.
3. Si $L_1 \subseteq L_2$ et $L_1$ est rationnel alors $L_2$ est aussi rationnel.
4. Si $L_1 \subseteq L_2$ et $L_2$ est rationnel alors $L_1$ est aussi rationnel.
5. Le complémentaire d'un langage algébrique est toujours algébrique.
6. Soit un langage algébrique $L \subseteq \{a, b, c\}^*$. Dans chaque mot $w \in L$ on remplace chaque occurence de la lettre $c$ par le mot $aabbcc$. Alors le langage $L' \subseteq \{a, b\}^*$ ainsi obtenu est algébrique.
7. Le langage $(b + c)^* b^* + (ac^*)^* bb^* ab$ est algébrique.
8. Tout langage algébrique est reconnaissable par un automate fini non-déterministe.
9. Tout langage algébrique est reconnaissable par un automate fini déterministe.
10. Soit $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Alors $L^*$ est algébrique.
11. Soit $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Alors $L^*$ est algébrique.
12. Si on enlève à un langage algébrique un nombre fini de mots, il reste algébrique.