Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 1, 2009/2010

INFOT2 : DS2

Durée : 1H 30
Tous documents autorisés. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 [8 points]

1- Donner un automate fini déterministe qui reconnait le langage :

$$L_0 := \{a, b\}^* bba\{a, b\}^*$$

2- Donner un automate à pile qui reconnait le langage L_0.
3- On considère une lettre # n'appartenant pas à l'alphabet X et on définit le langage :

$$L_1 := \{u\#\tilde{u} \mid u \in L_0\}.$$

Donner un automate à pile qui reconnait le langage L_1.
4- Tirer de l'automate à pile de la question 3 une grammaire algébrique qui engendre L_1.

Exercice 2 [8 points]

On considère l'alphabet fini $X := \{a, b\}$.
1- Montrer que $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ est algébrique.
2- Montrer que $\{a^n b^n a^n b^n \mid n \geq 1\}$ est non-algébrique.
3- Montrer que $\{a^p b^q a^r b^s a^t \mid p, q, r, s, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p = t \text{ et } 2q = r\}$ est algébrique.
On s'intéresse maintenant à trois opérations Φ_1, Φ_2, Φ_3 sur les langages écrits sur l'alphabet X. Les applications $\Phi_i : \mathcal{P}(X^*) \to \mathcal{P}(X^*)$ (où $i \in [1, 3]$), sont définies par :

$$\begin{aligned}
\Phi_1(L) &:= \{w \cdot w' \mid w, w' \in L\} \\
\Phi_2(L) &:= \{w \cdot w \mid w \in L\} \\
\Phi_3(L) &:= \{w \mid w \cdot w \in L\}.
\end{aligned}$$

(Le langage $\Phi_3(L)$ est parfois dénommé la *racine carrée* de L puisqu'il est formé des mots dont le carré appartient à L).
4- Est-il vrai que, pour tout langage L algébrique, $\Phi_1(L)$ est algébrique ?
5- Est-il vrai que, pour tout langage L algébrique, $\Phi_2(L)$ est algébrique ?
6- Est-il vrai que, pour tout langage L algébrique, $\Phi_3(L)$ est algébrique ?
Aide : On pourra calculer le langage $\Phi_3(L_3) \cap a^+b^+a^+$ où L_3 est le langage examiné à la question 3.

Exercice 3 [8 points]

On considère l'alphabet gradué $F := \{f, m, a\}$ où f est binaire, m est unaire et a est nullaire. On définit le langage de mots

$$R := a(mf)^*$$

1- Donner un automate fini déterministe, complet, de mots sur l'alphabet F, reconnaissant le langage R (les arités des lettres f, m, a ne jouent ici aucun rôle).
2- On note T_1 l'ensemble des termes sur F qui possèdent *au moins* une branche étiquetée par un mot de $(fm)^*a$ (en lisant les étiquettes de la racine vers les feuilles).

2.1- Donner un exemple de terme appartenant à T_1 et un exemple de terme n'appartenant pas à T_1.
2.2- En vous aidant de la question 1, construire un automate fini de termes, qui reconnait l'ensemble T_1.
3- On note T_2 l'ensemble des termes sur F dont *toutes* les branches sont étiquetées par un mot de $(fm)^*a$ (en lisant les étiquettes de la racine vers les feuilles).
3.1- Donner un exemple de terme appartenant à T_2 et un exemple de terme n'appartenant pas à T_2.
3.2 Construire un automate fini de termes, qui reconnait l'ensemble T_2.
4- On note T_3 l'ensemble des termes sur F dont *le nombre* de branches étiquetées par un mot de $(fm)^*a$ (en lisant les étiquettes de la racine vers les feuilles) est exactement égal à 3.
4.1- Donner un exemple de terme appartenant à T_3 et un exemple de terme n'appartenant pas à T_3.
4.2 Construire un automate fini de termes, qui reconnait l'ensemble T_3.