Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 1, 2009/2010

INFOT2 : DS

Durée : 1H 30
Tous documents autorisés. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 [6 points]
Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. Chaque bonne réponse apporte un demi-point, chaque mauvaise réponse enlève un demi-point, chaque absence de réponse apporte zéro points.

1. Tout langage algébrique est rationnel.
2. Tout langage rationnel est algébrique.
3. Si $L_1 \subseteq L_2$ et L_1 est algébrique alors L_2 est aussi algébrique.
4. Si $L_1 \subseteq L_2$ et L_2 est algébrique alors L_1 est aussi algébrique.
5. Le complémentaire d'un langage rationnel est toujours algébrique.
6. Soit un langage algébrique $L \subseteq \{a, b, c\}^*$. Dans chaque mot $w \in L$ on remplace chaque occurence de la lettre c par le mot *babba*. Alors le langage $L' \subseteq \{a, b\}^*$ ainsi obtenu est algébrique.
7. Le langage $(a + b)^*ccb^* + (ca^*)^*cb^*a$ est algébrique.
8. Tout langage algébrique est reconnaissable par un automate fini non-détreministe.
9. Tout langage algébrique est reconnaissable par un automate fini déterministe.
10. Soit $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Alors $L^* = \{(a^n b^n)^m \mid m, n \geq 0\}$.
11. Soit $\boxed{S \to \ldots}$ une grammaire pour un langage L. Alors $\boxed{E \to \varepsilon | SE,\ S \to \ldots}$ est une grammaire pour le langage L^*.
12. Si on ajoute à un langage algébrique un nombre fini de mots, il reste algébrique.

Exercice 2 [8 points]
On considère l'aphabet fini $X := \{a, b, c, d\}$. Soit

$$L := \{u \in X^* \mid \exists n \in \mathbb{N}, |u| = n^2\}$$

Par exemple $aaaa, abaa, abcabcabc, abbbbbbca$ appartiennent à L puisque leurs longueurs sont respectivement $4, 4, 9, 9$ qui sont bien des carrés.
1- Donner un plus court mot de chacun des résiduels :

$$\varepsilon^{-1}L, a^{-1}L, (aa)^{-1}L, (aaaaaaaaaa)^{-1}L$$

2- Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la plus petite longueur des mots du résiduel $(a^{n^2+1})^{-1}L$.
3- Le langage L a-t-il un nombre fini de résiduels ?
4- Le langage L est-il rationnel ?
On définit les langages

$$L_a := L \cap a^*, L_b := L \cap b^*, L_c := L \cap c^*, L_d := L \cap d^*$$

5- Les langages L_a, L_b, L_c, L_d sont-ils rationnels ?
6- Le langage $(L_a \cdot L_b \cdot L_c \cdot L_d)$ est-il rationnel ?
7- Le langage L_a^* est-il rationnel ?
8- Le langage $(L_a \cdot L_a \cdot L_a \cdot L_a)$ est-il rationnel ?
Indication : On admettra le *théorème des quatres carrés*, qui affirme que, pour tout entier $n \geq 0$, il existe quatres entiers n_1, n_2, n_3, n_4 tels que $n = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2$.

Exercice 3 [6 points]
On considère l'alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$. Soit la grammaire algébrique

$$G := \langle \Sigma, \{S, C, D, R, T, U, V, X, Y, Z\}, Q, S \rangle,$$

dont l'ensemble de règles est défini par :

$$Q = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & DC \mid CD \mid CT \\ C & \rightarrow & CT \mid XbYa \mid YbXa \\ D & \rightarrow & UD \mid XaYb \mid VaXb \\ R & \rightarrow & aX \mid UD \mid CD \mid VT \\ T & \rightarrow & VT \mid TU \\ U & \rightarrow & aU \mid bV \mid CT \\ V & \rightarrow & CU \mid aT \\ X & \rightarrow & aX \mid bY \mid aXb \mid a \mid b \\ Y & \rightarrow & aY \mid bY \mid abX \mid a \mid b \\ Z & \rightarrow & aZ \mid bZ \mid X \mid Y \end{array} \right.$$

1- Donnez une grammaire *propre et réduite* engendrant le même langage que G.
2- Donnez une grammaire *sous forme normale de Chomsky* engendrant le même langage que G.