Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 1, 2008/2009

INFOT2 : DS

Durée : 1H 30
Tous documents autorisés. Les exercices sont indépendants.
La note obtenue, sur 20, est le minimum entre 20 et le total des points obtenus

Exercice 1 [6 points]

Soient L_1, L_2 deux langages rationnels sur un alphabet fini X.
1- Soit $u \in X^*$. Exprimez le résiduel $u^{-1}(L_1 \cup L_2)$ en fonction des résiduels $u^{-1}L_1$,$u^{-1}L_2$
2- Déduisez-en une majoration (la plus fine possible) du nombre de résiduels du langage $L_1 \cup L_2$ en fonction du nombre de résiduels de L_1 et du nombre de résiduels de L_2.
3- Dans le cas particulier où $L_1 \cup L_2 = X^*$, quel est le nombre de résiduels de $L_1 \cup L_2$?
4- Donnez une minoration (la plus fine possible) du nombre de résiduels du langage $L_1 \cup L_2$.
5- Que peut-on conclure des questions 2,4 concernant le nombre d'états des automates déterministes complets $\mathcal{A}_1, A_2, A_3$ reconnaissant respectivement $L_1, L_2, L_1 \cup L_2$?

Exercice 2 [6 points]

Donner une grammaire algébrique pour le langage qui se compose de tous les mots

$$u_1 \# u_2 \# \dots \# u_k$$

tels que :
- $k \geq 2$;
- $u_i \in \{a, b\}^*$ pour tout $i = 1, 2, \dots, k$;
- il existe $1 \leq i < j \leq k$ tels que u_j est l'image miroir de u_i.

Exercice 3 [6 points]
On considère l'alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$. Soit la grammaire algébrique $G := \langle \Sigma, \{S\}, R, S \rangle$, dont l'ensemble de règles est défini par :

$$R = \begin{cases} S & \rightarrow & aSU \mid aSV \mid bSV \mid TT \\ T & \rightarrow & UcV \mid c \\ U & \rightarrow & aa \mid aU \mid V \mid \epsilon \\ V & \rightarrow & bb \mid bU \mid U \mid \epsilon \end{cases}$$

1- Donnez une grammaire *propre* engendrant le même langage que G.
2- Donnez une grammaire *sous forme normale de Chomsky* engendrant le même langage que G.
3- Décrivez le langage L_G.

Exercice 4 [6 points]
Soient l'alphabet $X = \{a, b, c, d\}$ et les langages de X^* suivants :

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^m c^p d^q \mid n, m, p, q \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &= \{a^n b^n c^n d^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_3 &= \{w \in X^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c = |w|_d\} \end{aligned}$$

1- L_1 est-il régulier ? Algébrique ? Justifiez.
2- Prouvez que L_2 n'est pas algébrique.
3- L_3 est-il un langage algébrique ? Justifiez votre réponse par les propriétés de clôture de la famille des langages algébriques.

Exercice 5 [6 points]
Soit l'alphabet gradué $F := \{f, m, a\}$ avec $\mathbf{ar} : f \mapsto 2, m \mapsto 1, a \mapsto 0\}$. Nous définissons deux F-algèbres $\mathcal{M}_i = \langle D_i, f_i, m_i, a_i \rangle$ $(i \in \{1, 2\})$ comme suit :

$$D_1 := \mathbb{Z}, \quad f_1(x, y) := x + y, \quad m_1(x) := -x, \quad a_1 := 1.$$

$$D_2 := \{0, 1, 2\}, \quad f_2(x, y) := x + y(\mathrm{mod} 3), \quad m_2(x) := -x(\mathrm{mod} 3), \quad a_2 := 1.$$

Soient $h : D_1 \rightarrow D_2$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, h(n) := n(\mathrm{mod} 3).$$

et $k : D_1 \rightarrow D_2$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, k(n) := -n(\mathrm{mod} 3).$$

1- L'application h est-elle un homomorphisme de F-algèbre de $\mathcal{M}_1$ dans $\mathcal{M}_2$?
2- L'application k est-elle un homomorphisme de F-algèbre de $\mathcal{M}_1$ dans $\mathcal{M}_2$?
3- Soit $h_2 : T(F) \rightarrow \mathcal{M}_2$ un homorphisme de F-algèbres.
3.1 Que valent $h_2(f(a, a))$, $h_2(f(f(a, a), f(a, a)))$?
3.2 Donner un exemple de terme t tel que $h_2(t) = 0$.
3.3 Notons L l'ensemble de termes $h_2^{-1}(0)$. Supposons que $t_1, t_2 \in L$. Est-il vrai (resp. possible, impossible) que $f(t_1, t_2) \in L$? que $f(t_1, a) \in L$? que $f(f(t_1, a), f(t_2, a)) \in L$?
Donner un exemple de terme t' tel que $f(t_1, f(t_2, f(t', a))) \in L$.