Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 1, 2007/2008

INFOT2 : DS

Durée : 1H 30
Tous documents autorisés. Les quatres exercices sont indépendants.

Exercice 1 [5 points]

1- Donnez une grammaire algébrique pour le langage suivant :

$$L = \{a^n b^p c^q d^r \mid n \geq 0, p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0, \quad n + p = q + r\}$$

2- Construisez un automate à pile qui reconnaisse L.

Exercice 2 [7 points]

On considère l'alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$. Soit la grammaire algébrique $G := \langle \Sigma, \{S\}, R, S \rangle$, dont l'ensemble de règles est défini par :

$$R := \begin{cases} S & \rightarrow \quad T \,+\, aTb \,+\, U \,+\, V \\ T & \rightarrow \quad aTb \,+\, \epsilon \\ U & \rightarrow \quad SV \,+\, c \\ V & \rightarrow \quad Vc + c \end{cases}$$

1- Donnez une grammaire *propre* engendrant le même langage que G.
2- Donnez une grammaire *sous forme normale de Chomsky* engendrant le même langage que G, et décrivez ce langage.
3- Les langages suivants sont-ils algébriques ? Justifiez chaque réponse en une ou deux lignes.

- $K_1 := \{a^n b^m c^n, n \geq 0, m \geq 1\}$
- $K_2 := \{a^m b^n c^n, n \geq 0, m \geq 1\}$
- $K_3 := \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$

Exercice 3 [5 points]

Soit le langage :

$$L = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\} \cdot c^*$$

1- Donnez des arguments permettant d'affirmer que ce langage est algébrique (propriétés de clôture).
2- Donnez une grammaire algébrique pour L.

Exercice 4 [15 points]
On considère la grammaire algébrique

$$G := \langle \{a,b\}, \{S,T\}, P, S\rangle$$

où l'ensemble P est composé des règles suivantes :

$$S \to TS + \varepsilon \quad T \to aSb + ab$$

1- Est-il vrai que :

$$S \xrightarrow{*} abab\,? \;\; T \xrightarrow{*} aababb\,? \;\; S \xrightarrow{*} ababaababb\,?$$

Dans l'affirmative, détaillez une dérivation gauche de S en $abab$ (resp. de T en $aababb$, de S en $ababaababb$).
2- Dessinez un arbre de dérivation, dans la grammaire G, de S en $ababaababb$.

On dénote par $\preceq$ la relation "être préfixe de". On note $u \prec v$ ssi ($u \preceq v$ et $u \neq v$). Soit $A := \{a,b\}$. Pour tout mot $u \in A^*$ on note $\pi(u) := |u|_a - |u|_b$. On considère les langages suivants :

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{u \in A^*, \pi(u) = 0 \text{ et } \forall v \in A^*, v \preceq u \Rightarrow \pi(v) \geq 0\} \\ L_2 &:= \{u \in A^+, \pi(u) = 0 \text{ et } \forall v \in A^+, v \prec u \Rightarrow \pi(v) > 0\} \end{aligned}$$

Le but des questions suivantes est de montrer que $L_G(S) = L_1$, $L_G(T) = L_2$ et de déterminer si G est ambiguë ou non.
3-
3.1 Vérifier que $\varepsilon \in L_1, ababab \in L_1, aabbab \in L_1$.
3.2 Vérifiez que $ab \in L_2, aababb \in L_2$.
3.3 Vérifiez que $\varepsilon \notin L_2, ababab \notin L_2, aabbab \notin L_2$.
4- Est-il vrai que $L_1 = L_1^*$?
5-
5.1 Montrez que tout mot $u \in L_1$ a une unique décomposition de la forme :

$$u = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$$

avec $n \geq 0$ et chaque mot u_i appartient à L_2.
5.2 Montrez que tout mot $u \in L_2$ a une unique décomposition de la forme :

$$u = a \cdot u_1 \cdot u_2 \cdots u_n \cdot b$$

avec $n \geq 0$ et chaque mot u_i appartient à L_2.
6- Montrez que

$$L_1 = L_2 L_1 \cup \{\varepsilon\}, \quad L_2 = aL_1 b \cup \{ab\}.$$

7- Montrez que $L_G(S) = L_1$ et $L_G(T) = L_2$.
8- La grammaire G est-elle ambiguë ?