Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 6, 2008/2009

INFOT2 : Examen du 6 Mai

Une solution

Exercice 1 [7 points]
1- les automates finis $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sont déterministes complets : pour chaque couple $(q,x) \in Q_i \times X$, il existe une unique transition $(q,x,q') \in \delta_i$.
Ils sont minimaux : on le vérifie en calculant l'équivalence de Nerode de ces automates et en constatant qu'elle se réduit à l'égalité.
2- L'automate fini $\mathcal{B} =< X, Q_1 \times Q_2, D, A, \delta >$, produit des automates $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ de l'énoncé a la table de transitions suivante :

$x \setminus q$	00	01	02	10	11	12	20	21	22
a	11	12	12	21	22	22	01	02	02
b	02	00	02	12	10	12	22	20	22

Son ensemble d'états de départ (resp. d' arrivée) est $D = \{00\}$ (resp. $A = \{11\}$). Calculons la partition en classes de $Q_1 \times Q_2$ pour l' équivalence de Nerode, selon l'algorithme des raffinements successifs. On obtient :

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \{00, 01, 02, 10, 12, 20, 21, 22\}, \{11\} \\
\pi_1 &= \{00\}, \{01, 02, 10, 12, 20, 21, 22\}, \{11\} \\
\pi_2 &= \{00\}, \{01\}, \{02, 10, 12, 20, 21, 22\}, \{11\} \\
\pi_2 &= \{00\}, \{01\}, \{20\}, \{02, 10, 12, 21, 22\}, \{11\} \\
\pi_2 &= \{00\}, \{01\}, \{20\}, \{21\}, \{02, 10, 12, 22\}, \{11\} \\
\pi_2 &= \{00\}, \{01\}, \{20\}, \{21\}, \{10\}, \{02, 12, 22\}, \{11\} \\
\pi_6 &= \pi_5
\end{aligned}$$

L'automate déterministe complet minimal $\mathcal{M}$ de $L_{\mathcal{A}_1} \cap L_{\mathcal{A}_2}$ s' obtient en quotientant l'automate $\mathcal{B}$ par son équivalence de Nerode. On obtient : $\mathcal{M} =< X, \bar{Q}, \bar{D}, \bar{A}, \bar{\delta} >$ où

$$\bar{Q} = \{\bar{0}\bar{0}, \bar{0}\bar{1}, \bar{0}\bar{2}, \bar{1}\bar{0}, \bar{1}\bar{1}, \bar{2}\bar{0}, \bar{2}\bar{1}\}, \quad \bar{D} = \{\bar{0}\bar{0}\}, \bar{A} = \{\bar{1}\bar{1}\},$$

et $\bar{\delta}$ est donnée par la table :

$x \setminus q$	$\bar{0}\bar{0}$	$\bar{0}\bar{1}$	$\bar{0}\bar{2}$	$\bar{1}\bar{0}$	$\bar{1}\bar{1}$	$\bar{2}\bar{0}$	$\bar{2}\bar{1}$
a	$\bar{1}\bar{1}$	$\bar{0}\bar{2}$	$\bar{0}\bar{2}$	$\bar{2}\bar{1}$	$\bar{0}\bar{2}$	$\bar{0}\bar{1}$	$\bar{0}\bar{2}$
b	$\bar{0}\bar{2}$	$\bar{0}\bar{0}$	$\bar{0}\bar{2}$	$\bar{0}\bar{2}$	$\bar{1}\bar{0}$	$\bar{0}\bar{2}$	$\bar{0}\bar{2}$

Exercice 2 [7 points]
Première phase : éliminer les variables qui engendrent le langage vide. On calcule successivement :

$$V_0 = \{S_5\}, V_1 = \{S_5, S_2\}, V_2 = \{S_5, S_2, S_1\}, V_3 = V_2.$$

On en déduit que $L_G(S_3) = L_G(S_4) = \emptyset$ et , pour $i \in [1,5] - \{3,4\}$, $L_G(S_i) \neq \emptyset$.
En remplaçant S_3 et S_4 par $\emptyset$ dans les règles de grammaires, et en supprimant les règles de membre gauche S_3 ou S_4 on obtient :

$$R_1 := \begin{cases} S_1 & \rightarrow & S_2S_5 \\ S_2 & \rightarrow & S_1S_2S_2 \; + \; bS_5 \\ S_5 & \rightarrow & S_5S_2 \; + \; \varepsilon \end{cases}$$

Deuxième phase : éliminer les variables innaccessibles depuis l' axiome S_1. L'ensemble des variables accessibles est $\{S_1, S_2, S_5\}$. La grammaire $G_1 := \langle \Sigma, \{S_1, S_2, S_5\}, R_1, S_1\rangle$ est donc réduite. Troisième phase : éliminer les ϵ-règles. On calcule $V_\varepsilon = \{S_5\}$. On obtient :

$$R_3 := \begin{cases} S_1 & \rightarrow & S_2S_5 \; + \; S_2 \\ S_2 & \rightarrow & S_1S_2S_2 \; + \; bS_5 + \; b \\ S_5 & \rightarrow & S_5S_2 \; + \; S_2 \end{cases}$$

Quatrième phase : éliminer les règles de chaînage.

$$R_4 := \begin{cases} S_1 & \rightarrow & S_2S_5 + \; S_1S_2S_2 \; + \; bS_5 + \; b \\ S_2 & \rightarrow & S_1S_2S_2 \; + \; bS_5 + \; b \\ S_5 & \rightarrow & S_5S_2 \; + \; S_1S_2S_2 \; + \; bS_5 + \; b \end{cases}$$

La grammaire $G_4 := \langle \Sigma, \{S_1, S_2, S_5\}, R_4, S_1\rangle$ est propre. On vérifie qu' elle est réduite (chaque variable engendre b et chaque variable est accessible). La grammaire G_4 est propre et réduite et engendre $L_G \setminus \{\varepsilon\}$.
N.B. En fait $\mathrm{L}_{G_4} = \mathrm{L}_G$ car, d'après le calcul de la troisième phase, $\varepsilon \notin \mathrm{L}_G$.
2- En introduisant un nouvel axiome σ, un non-terminal B qui engendre le langage $\{b\}$ puis le non-terminal U_1 qui engendre le facteur S_1S_2, on obtient la grammaire en forme normale de Chomsky : $G_5 := \langle \Sigma, \{\sigma, S_1, S_2, S_5, B, U_1\}, R_5, \sigma\rangle$

$$R_5 := \begin{cases} \sigma & \rightarrow & S_2S_5 + U_1S_2 \; + \; BS_5 + \; b \\ U_1 & \rightarrow & S_1S_2 \\ S_1 & \rightarrow & S_2S_5 + U_1S_2 \; + \; BS_5 + \; b \\ S_2 & \rightarrow & U_1S_2 \; + \; BS_5 + \; b \\ S_5 & \rightarrow & S_5S_2 \; + \; U_1S_2 \; + \; BS_5 + \; b \\ B & \rightarrow & b \end{cases}$$

Exercice 3 [5 points]
1- Non : $(q_0, \Omega) \xrightarrow{a} (q_1, \Omega F)$ et aucun autre calcul partant de (q_0, Ω) et lisant a n'est possible.
2- Non : l'automate $\mathcal{A}$ ne peut lire d à partir de (q_0, Ω).
3- Oui : $(q_0, \Omega) \xrightarrow{a} (q_1, \Omega F) \xrightarrow{d} (q_3, \Omega) \xrightarrow{\varepsilon} (q_3, \varepsilon)$.
4- Non : $(q_0, \Omega) \xrightarrow{a} (q_1, \Omega F)$ et aucune transition lisant b n' est possible à partir de $(q_1, \Omega F)$ et aucun autre calcul partant de (q_0, Ω) et lisant a n'est possible.
5- Oui : $(q_0, \Omega) \xrightarrow{b} (q_2, \Omega F) \xrightarrow{a} (q_2, \Omega FF) \xrightarrow{d} (q_3, \Omega F) \xrightarrow{d} (q_3, \Omega) \xrightarrow{\varepsilon} (q_3, \varepsilon)$.
6- Oui : $(q_0, \Omega) \xrightarrow{a} (q_1, \Omega F) \xrightarrow{a^{n-1}} (q_1, \Omega F^n) \xrightarrow{c^m} (q_1, \Omega F^n) \xrightarrow{d^n} (q_3, \Omega) \xrightarrow{\varepsilon} (q_3, \varepsilon)$.
7- Oui : $(q_0, \Omega) \xrightarrow{a^n} (q_1, \Omega F^n) \xrightarrow{c^{m_1}} (q_1, \Omega F^n) \xrightarrow{a^n} (q_1, \Omega F^{2n} n) \xrightarrow{c^{m_2}} (q_1, \Omega F^{2n}) \xrightarrow{d^n} (q_3, \Omega F^n) \xrightarrow{c^{m_3}} (q_3, \Omega F^n) \xrightarrow{d^n} (q_3, \Omega) \xrightarrow{\varepsilon} (q_3, \varepsilon)$.
8- Non : $cad \notin \mathrm{L}(\mathcal{A})$ mais $ad \in \mathrm{L}(\mathcal{A})$, donc $cad \in (c^*\mathrm{L}(\mathcal{A})) - \mathrm{L}(\mathcal{A})$.

9- Oui : car $(q_0,\Omega) \xrightarrow{a} (q_1,\Omega F)$ et $(q_1,\Omega F) \xrightarrow{c} (q_1,\Omega F)$ et $(q_0,\Omega) \xrightarrow{b} (q_2,\Omega F)$ et $(q_2,\Omega F) \xrightarrow{c} (q_2,\Omega F)$.
10- Non : Si $u \neq \varepsilon$ et si $q \in Q$ est tel que $(q_0,\Omega) \xrightarrow{u} (q,\varepsilon)$, alors $q = q_3$ et le seul autre calcul de $\mathcal{A}$ sur u est de la forme $(q_0,\Omega) \xrightarrow{u} (q_3,\Omega)$. Mais il n' y a aucun calcul de la forme $(q_3,\Omega) \xrightarrow{v} (q',\varepsilon)$, ni de la forme $(q_3,\varepsilon) \xrightarrow{v} (q',\varepsilon)$ avec un mot $v \neq \varepsilon$.

Exercice 4 [7 points]

1- Donnons pour chaque L_i un a.f.t. $\mathcal{A}_i = \langle F, Q_i, Q_{i,+}, \delta_i\rangle$ qui le reconnaît.
$Q_1 = \{0\}, Q_{1,+} = \{0\}$ et δ_1 est constituée des transitions suivantes :

$$a{\to}0,\ m(0){\to}0.$$

$Q_2 = \{0,1,2\}, Q_{2,+} = \{2\}$ et δ_2 est constituée des transitions suivantes :

$$\begin{array}{rl} a{\to}0 & \\ m(i){\to}i & \text{pour tous les } i \in Q \\ f(i,j){\to}\min(i+j+1,2) & \text{pour tous les } (i,j) \in [0,2]\times[0,2] \end{array}$$

$Q_3 = \{0,1,2,3\}, Q_{3,+} = \{2\}$ et δ_3 est constituée des transitions suivantes :

$$\begin{array}{rl} a{\to}0 & \\ m(i){\to}i & \text{pour tous les } i \in Q \\ f(i,j){\to}\min(i+j+1,3) & \text{pour tous les } (i,j) \in [0,3]\times[0,3] \end{array}$$

$Q_4 = \{0,1,2,3\}, Q_{4,+} = \{0\}$ et δ_4 est constituée des transitions suivantes :

$$\begin{array}{rll} a{\to}2 & m(2){\to}0 & \\ f(0,j){\to}1 & f(1,j){\to}0 & \text{pour tous les } j \in [0,3] \\ m(i){\to}3 & & \text{pour tous les } i \in \{0,1,3\} \\ f(i,j){\to}3 & & \text{pour tous les } i \in \{2,3\}, j \in [0,3] \end{array}$$

2- Décrivons L_1, L_3, L_4 par des expressions rationnelles.
$L_1 = \{m(v)\}^{*v} \circ_v \{a\}$.
On utilisera, dans ce qui suit, le fait que :

$$T(F) = \{f(v,v), m(v)\}^{*v} \circ_v \{a\}.$$

On a les relations :

$$\begin{array}{rcl} L_3 & = & (\{m(v)\}^{*v} \circ_v \{f(v,w), f(w,v)\} \circ_v \{m(v)\}^{*v} \circ_v \{f(w,w)\}) \circ_w L_1 \\ L_4 & = & (\{f(f(v,w),w)\}^{*v} \circ_v \{m(a)\}) \circ_w T(F). \end{array}$$

En remplaçant L_1 (resp. $T(F)$) par l'expression rationnelle donnée au-dessus, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} L_3 & = & (\{m(v)\}^{*v} \circ_v \{f(v,w), f(w,v)\} \circ_v \{m(v)\}^{*v} \circ_v \{f(w,w)\}) \circ_w (\{m(w)\}^{*w} \circ_w \{a\}) \\ L_4 & = & (\{f(f(v,w),w)\}^{*v} \circ_v \{m(a)\}) \circ_w (\{f(w,w), m(w)\}^{*w} \circ_w \{a\}). \end{array}$$