Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 6, 2007/2008

# INFOT2 : Examen du 24 Avril

**Une solution**

## Exercice 1 [5 points]

Première phase : éliminer les variables qui engendrent le langage vide. On calcule successivement :

$$V_0 = \{S_2, S_4\}, V_1 = \{S_1, S_2, S_4, S_5\}, V_2 = \{S_1, S_2, S_4, S_5\} = V_1.$$

On en déduit que $L_G(S_3) = \emptyset$ et , pour $i \in [1, 5] - \{3\}$, $L_G(S_i) \neq \emptyset$.
En remplaçant $S_3$ par $\emptyset$ dans les règles de grammaires, on obtient :

$$R_1 := \left\{ \begin{array}{lcl} S_1 & \rightarrow & S_1S_1S_1 \ + \ S_4 \\ S_2 & \rightarrow & S_2S_2 \ + \ S_1S_5 \ + \ b \ + \ \epsilon \\ S_4 & \rightarrow & S_4S_4 \ + \ a \\ S_5 & \rightarrow & S_4S_5 \ + \ S_2a \end{array} \right.$$

Deuxième phase : éliminer les variables innaccessibles depuis l' xiome $S_1$. L'ensemble des variables accessibles est $\{S_1, S_4\}$. On obtient alors :

$$R_2 := \left\{ \begin{array}{lcl} S_1 & \rightarrow & S_1S_1S_1 \ + \ S_4 \\ S_4 & \rightarrow & S_4S_4 \ + \ a \end{array} \right.$$

Troisième phase : éliminer les $\epsilon$-règles (rien à faire ici).
Quatrième phase : éliminer les règles de chaînage.

$$R_4 := \left\{ \begin{array}{lcl} S_1 & \rightarrow & S_1S_1S_1 \ + \ S_4S_4 \ + \ a \\ S_4 & \rightarrow & S_4S_4 \ + \ a \end{array} \right.$$

2- On voit que la grammaire $\langle \Sigma, \{S_1, S_4\}, R_4, S_1 \rangle$ engendre $a^+$. Donc $L_G = a^+$.

## Exercice 2 [5 points]

1- Le langage $L_1$ est engendré par la grammaire $G_1 := \langle \{a, b, \#\}, \{S\}, P_1, S \rangle$ où l'ensemble $P_1$ est composé des règles $S \rightarrow aSa \ + \ bSb \ + \ \#$.
2- Soit $\sigma : \mathcal{P}(\{a, b, \#\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{a, b, \#\})$ la substitution définie par :

$$\sigma(\{a\}) = \{a\} \ , \ \sigma(\{b\}) = \{b\} \ , \ \sigma(\{\#\}) = \# \cdot \{a, b, \#\}^* \cdot \# \cup \{\#\}$$

On a :

$$L_2 = (\{a, b, \#\}^* \# \cup \{\varepsilon\}) \cdot \sigma(L_1) \cdot (\#\{a, b, \#\}^* \cup \{\varepsilon\}).$$

La substitution $\sigma$ est algébrique. Comme la famille des langages algébriques est close par substitution algébrique et par produit, $L_2$ est algébrique.

## Exercice 3 [5 points]

$K_1$ est rationnel : il est décrit par l'expression rationnelle $a^*b^*$.
$K_1$ est algébrique car tout rationnel est algébrique.
$K_2$ n'est pas rationnel car il a une infinité de résiduels : si $n \neq m$ alors $b^n \in (a^n)^{-1}K_2 - (a^m)^{-1}K_2$.
$K_2$ est algébrique : il est engendré par la grammaire, $S \rightarrow aSb + \varepsilon$.

$K_3$ n'est pas algébrique : il ne vérifie pas le lemme d' itération des langages algébriques vu en cours.
$K_3$ n'est pas rationnel puisque tout rationnel est algébrique.
$K_4$ n'est pas algébrique : son image par l'homomorphisme $h : \{a, b, c, d\}^* \to \{a, b, c\}^*$ défini par $h(a) = a, h(b) = b, h(c) = c, h(d) = \varepsilon$ est le langage $K_3$. Or les homomorphismes de monoïdes libres conservent l'algébricité.
$K_4$ n'est pas rationnel puisque tout rationnel est algébrique.
$K_5$ n'est pas rationnel : son image par l'homomorphisme $h' : \{a, b, c, d\}^* \to \{a, b\}^*$ défini par $h(a) = a, h(b) = b, h(c) = \varepsilon, h(d) = \varepsilon$ est le langage $K_2$. Or les homomorphismes de monoïdes libres conservent la rationnalité.
$K_5$ est algébrique : il est engendré par la grammaire $S \to TU; T \to aTb + \varepsilon; U \to cUd + \varepsilon$.

**Exercice 4** [5 points]

Donnons pour chaque langage $L_i$ $(3 \leq i \leq 7)$ un automate fini de termes qui le reconnaît.
$\mathcal{A}_3 = \langle F, Q_3, Q_{3,+}, \delta_3 \rangle$ où $Q_3 = \{0\}, Q_{3,+} = \{0\}$ et $\delta_1$ est constitué des règles :

$$a \to 0; \quad m(0) \to 0; \quad f(0, 0) \to 0.$$

$\mathcal{A}_4 = \langle F, Q_4, Q_{4,+}, \delta_4 \rangle$ où $Q_4 = \{0, 1\}, Q_{4,+} = \{0\}$ et $\delta_4$ est constitué des règles :

$$a \to 0; \quad m(0) \to 1; \quad f(0, 0) \to 0.$$

$\mathcal{A}_5 = \langle F, Q_5, Q_{5,+}, \delta_5 \rangle$ où $Q_5 = \{0, 1\}, Q_{5,+} = \{1\}$ et $\delta_5$ est constitué des règles :

$$a \to 0; \quad m(0) \to 1; \quad f(0, 0) \to 0; \quad f(1, 0) \to 1; \quad f(0, 1) \to 1.$$

$\mathcal{A}_6 = \langle F, Q_6, Q_{6,+}, \delta_6 \rangle$ où $Q_6 = \{0, 1, 2\}, Q_{6,+} = \{0\}$ et $\delta_6$ est constitué des règles :

$$a \to 0; \quad m(0) \to 1; \quad m(1) \to 2; \quad m(2) \to 2; f(1, j) \to 0; \quad f(0, j) \to 2; \quad f(2, j) \to 2 \text{ ( pour tout } j \in Q_6).$$

$\mathcal{A}_7 = \langle F, Q_7, Q_{7,+}, \delta_7 \rangle$ où $Q_7 = \{0, 1, 2\}, Q_{6,+} = \{2\}$ et $\delta_7$ est constitué des règles :

$$a \to 0; \quad m(0) \to 1; \quad m(1) \to 1; \quad m(2) \to 2; f(i, 1) \to 2; \quad f(i, 2) \to 2; \quad f(2, j) \to 2 \text{ ( pour tous } i, j \in Q_6).$$

**Exercice 5** [5 points]

1- Ecrivons une formule MSO $Der(x)$ qui exprime que $x$ est la dernière position du mot :

$$Der(x) := \forall y \cdot (\neg(S(x, y)).$$

Nous écrivons une formule MSO $\Phi$ qui exprime que, $w$ admet une dernière position $x$ telle que les positions $x - 2, x - 1, x$ ont pour étiquettes respectives les symboles $a, b, a$.

$$\begin{aligned} \Phi \quad := \quad & \exists x \cdot \exists y \cdot \exists z \cdot Der(x) \wedge S(y, x) \wedge S(z, y) \wedge \\ & P_a(z) \wedge P_b(y) \wedge P_a(x). \end{aligned}$$

2- La formule $\Psi$ exprime que toute occurrence (non finale) de la lettre $a$ est suivie d' une occurrence de la lettre $b$ et toute occurrence (non finale) de la lettre $b$ est suivie d' une occurrence de la lettre $a$. Autrement dit

$$\mathrm{L}(\Psi) = \{b, \varepsilon\}(ab)^*\{a, \varepsilon\}.$$

3- La formule $\Theta$ exprime qu'il existe une partition $(X_1, X_2)$ de l'ensemble des positions de $w$ telle que
3.1 toute position de $X_1$ est étiquetée par la lettre $a$
3.2 toute position de $X_2$ est étiquetée par la lettre $b$
3.3 toute position (non finale) de $X_i$ est suivie d' une position de $X_{3-i}$ (pour $i \in \{1, 2\}$).
Cette formule est donc équivalente à $\Psi$ et

$$\mathrm{L}(\Theta) = \{b, \varepsilon\}(ab)^*\{a, \varepsilon\}.$$