Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 1, 2010/2011

INFOT2 : DS

Une solution possible

Exercice 1 [12 points]
1- Les formules (2)(4) sont toujours vraies. La formule (3) peut être fausse (pour certaines valeurs de $\mathcal{A}$).
2-

$$C_2((abc)^*d) = (abc)^*d(abc)^* + bc(abc)^*d(abc)^*a + c(abc)^*d(abc)^*ab$$

$$C_2((ab)^*(cd)^*) = (ab)^*(cd)^*(ab)^* + b(ab)^*(cd)^*(ab)^*a + (cd)^*(ab)^*(cd)^* + d(cd)^*(ab)^*(cd)^*c.$$

3- La formule (6) est toujours vraie. Les formules (5)(7) peuvent être fausses (pour certaines valeurs de $\mathcal{A}$).
4- Pour tous $p, q \in Q$, le langage $L(p, q)$ est reconnaissable. Comme la famille des langages reconnaissables est close par produit fini et union finie, la formule (6) montre que $C_2(L)$ est reconnaissable, donc rationnel.
5-

$$C_3(\{abc, bb\}) = \{abc, cab, bca, cba, bb\}$$

$$C_3(\{abcd\}) = \{abcd, bcda, cdab, dabc, dcab, dbca, cdab\}.$$

6-

$$C_3(L) = \bigcup_{q\in D, r\in Q, s\in Q, t\in A} L(s,t) \cdot L(r,s) \cdot L(q,r)$$

Par les arguments de clôture utilisés à la question 4, cette formule montre que $C_3(L)$ est rationnel.
7-

$$C(a^* \cdot b^*) = \{a, b\}^*$$

$$C((ab)^*) = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a = |u|_b\}.$$

8- Le langage $(ab)^*$ est rationnel. Si $C((ab)^*)$ était rationnel , alors le langage $C((ab)^*) \cap a^*b^*$ serait rationnel. Or, d'après la question 7, $C((ab)^*) \cap a^*b^* = \{a^nb^n \mid n \geq 0\}$, qui n'est pas rationnel. Donc l' énoncé

$$\forall L \in RAT(\{a, b\}^*, C(L) \in RAT(\{a, b\}^*$$

est faux.
Exercice 2 [5 points]
1- On calcule successivement (selon les notations du cours) :

$$W_1 = \{S_2, S_6\}, \; W_2 = \{S_0, S_1, S_2, S_6\}, \; W_3 = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_6\}, \; W_4 = W_3.$$

Donc l'ensemble des variables de G qui engendrent un langage non-vide est

$$W = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_6\}.$$

2- Comme $S_0 \notin W, L_G \neq \emptyset$.
3- On simplifie G en

$$G' := \langle X, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_6\}, P', S_0\rangle,$$

dont l'ensemble de règles est défini par :

$$P' = \left\{ \begin{array}{lll} S_0 & \to & S_1S_2S_3 \ + \ xS_6 \\ S_1 & \to & S_1S_2S_1 \ + \ S_3S_6 \ + \ S_2S_2 \\ S_2 & \to & \varepsilon \ + \ xS_0S_1 \ + \ x \\ S_3 & \to & yS_0S_1 \ + \ xS_3S_3S_3 \\ S_6 & \to & \varepsilon \ + \ xS_1S_6 \ + \ yS_3S_3 \end{array} \right.$$

Cette grammaire ne contient que des variables qui engendrent un langage non-vide. Calculons l'ensemble des variables accessibles à partir de l'axiome S_0 :

$$U_0 = \{S_0\}, \ \ U_1 = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_6\}, \ \ U_2 = U_1$$

Donc l'ensemble des variables accessibles est $\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_6\}$, ce qui montre que G' est réduite.
4- On calcule successivement (selon les notations du cours) :

$$V_1 = \{S_2, S_6\}, \ \ V_2 = \{S_1, S_2, S_6\}, \ \ V_3 = V_2$$

donc

$$V_\varepsilon = \{S_1, S_2, S_6\}.$$

Comme $S_0 \notin V_\varepsilon$, $\varepsilon \notin L$.
5- On supprime les règles dont le membre droit vaut ε, ce qui donne :

$$G'' := \langle X, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_6\}, P'', S_0\rangle,$$

dont l'ensemble de règles est défini par :

$$P'' = \left\{ \begin{array}{lll} S_0 & \to & S_1S_2S_3 \ + \ S_2S_3 \ + \ S_1S_3 \ + \ S_3 \ + \ xS_6 \ + \ x \\ S_1 & \to & S_1S_2S_1 \ + \ S_1S_2 + \ S_2S_1 + \ S_1S_1 \ + \ S_2S_2 \ + \ S_3S_6 \ + \ S_2 \ + \ S_3 \\ S_2 & \to & xS_0S_1 \ + \ xS_0 \ + \ x \\ S_3 & \to & yS_0S_1 \ + \ yS_0 \ + \ xS_3S_3S_3 \\ S_6 & \to & xS_1S_6 \ + \ xS_6 \ + \ xS_1 \ + \ x \ + \ yS_3S_3 \end{array} \right.$$

On supprime ensuite les "chaînes", ce qui donne la grammaire :

$$G''' := \langle X, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_6\}, P''', S_0\rangle,$$

dont l'ensemble de règles est défini par :

$$P''' = \left\{ \begin{array}{lll} S_0 & \to & S_1S_2S_3 \ + \ S_2S_3 \ + \ S_1S_3 \ + \ xS_6 \ + \ x \ + \ yS_0S_1 \ + \ yS_0 \ + \ xS_3S_3S_3 \\ S_1 & \to & S_1S_2S_1 \ + \ S_1S_2 + \ S_2S_1 + \ S_1S_1 \ + \ S_2S_2 \ + \ S_3S_6 \ + \ xS_0S_1 \ + \ xS_0 \ + \ x \ + \\ & & \quad yS_0S_1 \ + \ yS_0 \ + \ xS_3S_3S_3 \\ S_2 & \to & xS_0S_1 \ + \ xS_0 \ + \ x \\ S_3 & \to & yS_0S_1 \ + \ yS_0 \ + \ xS_3S_3S_3 \\ S_6 & \to & xS_1S_6 \ + \ xS_6 \ + \ xS_1 \ + \ x \ + \ yS_3S_3 \end{array} \right.$$

Cette grammaire G''' est propre (par construction) et engendre $L - \{\varepsilon\}$. On vérifie que G''' est encore réduite.

Exercice 3 [5 points]

Posons
$$G_1 := \langle X, \{S_1, S_1', S_2, S_2'\}, P_1, S_1 \rangle,$$
dont l'ensemble de règles est défini par :
$$P_1 = \begin{cases} S_1 & \to & aS_1' \quad + \quad S_2 \\ S_1' & \to & aS_1'c \quad + \quad aS_1' \quad + \quad S_2' \\ S_2 & \to & bS_2' \\ S_2' & \to & bS_2'c \quad + \quad bS_2' \quad + \quad \varepsilon \\ \end{cases}$$

On obtient :
$$L_{G_1}(S_2') = \{b^q c^r \mid q \geq r\}, \quad L_{G_1}(S_2) = \{b^q c^r \mid q > r\},$$
$$L_{G_1}(S_1') = \{a^p b^q c^r \mid p + q \geq r\}, \quad L_{G_1}(S_1) = L_1\{a^p b^q c^r \mid p + q > r\}.$$

Posons
$$G_2 := \langle X, \{S_3, S_3', S_4'\}, P_2, S_3 \rangle,$$
dont l'ensemble de règles est défini par :
$$P_2 = \begin{cases} S_3 & \to & S_3'c \\ S_3' & \to & aS_3'c \quad + \quad S_4' \\ S_4' & \to & bS_4'c \quad + \quad S_4'c \quad + \quad \varepsilon \\ \end{cases}$$

On obtient :
$$L_{G_2}(S_4') = \{b^q c^r \mid q \leq r\}, \quad L_{G_2}(S_3') = \{a^p b^q c^r \mid p + q \leq r\}, \quad L_{G_2}(S_3) = \{a^p b^q c^r \mid p + q < r\}.$$

Posons
$$G_3 := \langle X, \{\sigma, S_1, S_1', S_2, S_2', S_3, S_3', S_4'\}, P_3, \sigma \rangle,$$
dont l'ensemble de règles est défini par :
$$P_3 := \{(\sigma, S_1), (\sigma, S_3)\} \cup P_1 \cup P_2.$$

On obtient :
$$L_{G_3}(\sigma) = L_{G_3}(S_1) \cup L_{G_3}(S_3) = L_1 \cup L_2 = \{a^p b^q c^r \mid p + q > r\} \cup \{a^p b^q c^r \mid p + q < r\} = L_3.$$

Exercice 4 [6 points]

1. Tout langage algébrique est rationnel.
   réponse : Non
   justification :$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ est algébrique mais n'est pas rationnel.

2. Tout langage rationnel est algébrique.
   réponse : Oui
   justification : tout langage rationnel est engendré par une grammaire linéaire droite.

3. Si $L_1 \subseteq L_2$ et L_1 est rationnel alors L_2 est aussi rationnel.
   réponse : Non
   justification :$\{ab\}$ est un langage rationnel inclus dans $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ qui n'est pourtant pas rationnel.

4. Si $L_1 \subseteq L_2$ et L_2 est rationnel alors L_1 est aussi rationnel.
   réponse : Non
   justification :$\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$. Le langage $\{a, b\}^*$ est rationnel, mais $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas rationnel.

5. Le complémentaire d'un langage algébrique est toujours algébrique.
   réponse : Non
   justification : Le langage $L = \{a^p b^q c^r \mid p \neq q$ ou $q \neq r\}$ est algébrique, mais $(X^* - L) \cap a^* b^* c^* = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas algébrique. Donc $X^* - L$ n'est pas algébrique.
6. Soit un langage algébrique $L \subseteq \{a, b, c\}^*$. Dans chaque mot $w \in L$ on remplace chaque occurence de la lettre c par le mot $aabbcc$. Alors le langage $L' \subseteq \{a, b, c\}^*$ ainsi obtenu est algébrique.
   réponse : Oui
   justification :Soit $\Phi : \mathcal{P}(\{a, b, c\}^* \to \mathcal{P}(\{a, b, c\}^*$ la substitution telle que :
   $$\Phi(\{a\}) = \{a\}, \quad \Phi(\{b\}) = \{b\}, \quad \Phi(\{c\}) = \{aabbcc\}$$
   Alors $L' = \Phi(L)$. Comme L est algébrique et Φ est une substitution algébrique, L' est algébrique.
   N.B. : il y avait une typo dans l'énoncé qui affirmait que $L' \subseteq \{a, b\}^*$, ce qui était faux!. Nous sommes désolés de cette typo (qui a été signalée au tableau). Les correcteurs tiennent compte de cette erreur du texte.

7. Le langage $(b + c)^* b^* + (ac^*)^* bb^* ab$ est algébrique.
   réponse : Oui
   justification : Il est rationnel, donc algébrique (question 2).

8. Tout langage algébrique est reconnaissable par un automate fini non-déterministe.
   réponse : Non
   justification :$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ est algébrique mais n'est pas rationnel. Il n'est donc pas reconnu par un automate fini non-déterministe.

9. Tout langage algébrique est reconnaissable par un automate fini déterministe.
   réponse : Non
   justification :$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ est algébrique mais n'est pas rationnel. Il n'est donc pas reconnu par un automate fini déterministe.

10. Soit $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Alors L^* est algébrique.
réponse : Oui
justification :la famille des langages algébriques est close par l'opération $*$.
11. Soit $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Alors L^* est algébrique.
réponse :Non
justification : $L^* \cap a^* b^* c^* = L$ qui n'est pas algébrique. Or la famille des langages algébriques est close par intersection avec les langages rationnels. Donc L^* n'est pas algébrique.
12. Si on enlève à un langage algébrique un nombre fini de mots, il reste algébrique.
réponse :Oui
justification :Soit L langage algébrique. Pour tout ensemble fini de mots F, le complémentaire $X^* - F$ est rationnel. Donc $L \cap (X^* - F)$ est algébrique.