Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 1, 2009/2010

INFOT2 : DS

Une solution possible

Exercice 1 [6 points]

Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. Chaque bonne réponse apporte un demi-point, chaque mauvaise réponse enlève un demi-point, chaque absence de réponse apporte zéro points.

1. Tout langage algébrique est rationnel.
   réponse : Non
   justification :$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ est algébrique mais n'est pas rationnel.

2. Tout langage rationnel est algébrique.
   réponse : Oui
   justification : tout langage rationnel est engendré par une grammaire linéaire droite.

3. Si $L_1 \subseteq L_2$ et L_1 est algébrique alors L_2 est aussi algébrique.
   réponse : Non
   justification :$\{abc\}$ est un langage algébrique inclus dans $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ qui n'est pourtant pas algébrique.

4. Si $L_1 \subseteq L_2$ et L_2 est algébrique alors L_1 est aussi algébrique.
   réponse : Non
   justification :$\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b, c\}^*$. Le langage $\{a, b, c\}^*$ est rationnel, donc algébrique (voir question2), mais $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas algébrique.

5. Le complémentaire d'un langage rationnel est toujours algébrique.
   réponse : Oui
   justification :Si L est rationnel, $X^* - L$ est rationnel et , par la question 2, L est algébrique.

6. Soit un langage algébrique $L \subseteq \{a, b, c\}^*$. Dans chaque mot $w \in L$ on remplace chaque occurence de la lettre c par le mot *babba*. Alors le langage $L' \subseteq \{a, b\}^*$ ainsi obtenu est algébrique.
   réponse : Oui
   justification :Soit $\Phi : \mathcal{P}(\{a, b, c\}^* \to \mathcal{P}(\{a, b, c\}^*$ la substitution telle que :

   $$\Phi(\{a\}) = \{a\}, \;\; \Phi(\{b\}) = \{b\}, \;\; \Phi(\{c\}) = \{babba\}$$

   Alors $L' = \Phi(L)$. Comme L est algébrique et Φ est une substitution algébrique, L' est algébrique.

7. Le langage $(a+b)^*ccb^* + (ca^*)^*cb^*a$ est algébrique.
réponse : Oui
justification :Il est rationnel, donc algébrique (question 2).

8. Tout langage algébrique est reconnaissable par un automate fini non-déterministe.
réponse : Non
justification :$\{a^nb^n \mid n \geq 0\}$ est algébrique mais n'est pas rationnel. Il n'est donc pas reconnu par un automate fini non-déterministe.

9. Tout langage algébrique est reconnaissable par un automate fini déterministe.
réponse : Non
justification :$\{a^nb^n \mid n \geq 0\}$ est algébrique mais n'est pas rationnel. Il n'est donc pas reconnu par un automate fini déterministe.

10. Soit $L = \{a^nb^n \mid n \geq 0\}$. Alors $L^* = \{(a^nb^n)^m \mid m, n \geq 0\}$.
réponse : Non
justification :$L^* = \{a^{n_1}b^{n_1}a^{n_2}b^{n_2}\cdots a^{n_m}b^{n_m} \mid m \geq 0, n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \ldots, n_m \geq 0\}$, qui contient strictement le langage $\{(a^nb^n)^m \mid m, n \geq 0\}$.

11. Soit $\boxed{S \to \ldots}$ une grammaire pour un langage L. Alors $\boxed{E \to \varepsilon|SE,\ S \to \ldots}$ est une grammaire pour le langage L^*. réponse :Oui
justification (informelle) : la sous-grammaire $E \to \varepsilon|SE$ engendre S^* et, à partir de S^* la sous-grammaire $S \to \ldots$ engendre L^*.

12. Si on ajoute à un langage algébrique un nombre fini de mots, il reste algébrique.
réponse :Oui
justification :Tout langage fini F est rationnel, donc algébrique. L'union de deux langages algébriques est algébrique.

Exercice 2 [8 points]
1- Donnons un plus court mot de chacun des résiduels :

$$\varepsilon^{-1}L : \varepsilon,\ \ a^{-1}L : \varepsilon,\ \ (aa)^{-1}L : aa,\ \ (aaaaaaaaaa)^{-1}L : aaaaaa$$

2- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$(a^{n^2+1})^{-1}L = \{u \in X^* \mid \exists m \in \mathbb{N}, |u| = m^2 - n^2 - 1, m^2 - n^2 - 1 \geq 0\}$$

Le plus petit entier m tel que $m^2 - n^2 - 1 \geq 0$ est $m = n+1$. Donc la plus petite longueur des mots de $(a^{n^2+1})^{-1}L$ est $(n+1)^2 - n^2 - 1$ c'est à dire :

$$2n.$$

3- D'après la question 2, si $n \neq n'$ alors $(a^{n^2+1})^{-1}L \neq (a^{n'^2+1})^{-1}L$ puisque la plus courte longueur des mots de ces deux langages n'est pas la même. Donc L a une infinité de résiduels.
4- L a une infinité de résiduels donc L n'est pas rationnel.

5- L'argument donné à la question 2 est encore valable pour L_a : la plus petite longueur des mots de $(a^{n^2+1})^{-1}L$ est $(n+1)^2 - n^2 - 1$ c'est à dire :

$$2n.$$

Donc L_a n'est pas rationnel. Par le même argument L_b, L_c, L_d ne sont pas rationnels.
6- Notons $M = (L_a \cdot L_b \cdot L_c \cdot L_d)$. Comme $M \cap a^* = L_a$, $M \cap a^*$ est non-rationnel. Or a^* est rationnel et $RAT(X^*)$ est clos par intersection. Donc M n'est pas rationnel.
7- Le langage L_a^* est-il rationnel ?
En fait

$$L_a^* = a^*$$

donc L_a^* est rationnel.
8- Notons $M_4 = (L_a \cdot L_a \cdot L_a \cdot L_a)$. D'après le théorème des quatre carrés,

$$M_4 = a^*$$

donc M_4 est rationnel.

Exercice 3 [6 points]
1- Les symboles T, U, V engendrent le langage vide. Les symboles R, Z ne sont pas accessibles à partir de S. Les symboles X, Y engendrent le même langage ($\{a,b\}^+$), on peut donc remplacer Y par X et simplifier les règles associées. On a alors la grammaire propre et réduite suivante : $G' := \langle \Sigma, \{S, C, D, X\}, Q', S\rangle$ où

$$Q' = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & DC \mid CD \\ C & \rightarrow & XbXa \\ D & \rightarrow & XaXb \\ X & \rightarrow & aX \mid bX \mid a \mid b \end{array} \right.$$

2- Cette grammaire peut être transformée en la grammaire suivante :

$$H = \langle \Sigma, \{S, C, D, E, F, A, B\}, Q'', S\rangle$$

dont l'ensemble de règles est défini par :

$$Q'' = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & DC \mid CD \\ C & \rightarrow & EF \\ D & \rightarrow & FE \\ E & \rightarrow & XB \\ F & \rightarrow & XA \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & b \end{array} \right.$$

qui est en forme normale de Chomsky.

Notons que le langage est rationnel : il s'agit du langage des quatrains sur a, b, sans contrainte de longueur, dont une expression rationnelle est $\Sigma^+a\Sigma^+b\Sigma^+b\Sigma^+a + \Sigma^+b\Sigma^+a\Sigma^+a\Sigma^+b$.