Université Bordeaux 1
Licence d'Informatique 1, 2008/2009

INFOT2 : DS
Une solution possible

Exercice 1 [6 points]
1- $u^{-1}(L_1 \cup L_2) = u^{-1}L_1 \cup u^{-1}L_2$.
2- L'application $\Phi : \mathbb{Q}(L_1) \times \mathbb{Q}(L_2) \to \mathbb{Q}(L_1 \cup L_2)$ est, d' après la question 1, une surjection. Donc

$$\mathrm{Card}(\mathbb{Q}(L_1 \cup L_2)) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{Q}(L_1)) \cdot \mathrm{Card}(\mathbb{Q}(L_2)).$$

3- $\mathbb{Q}(X^*) = \{X^*\}$. Par conséquent, lorsque $L_1 \cup L_2 = X^*$ on a $\mathrm{Card}(\mathbb{Q}(L_1 \cup L_2)) = 1$.
4- $\mathrm{Card}(\mathbb{Q}(L_1 \cup L_2)) \geq 1$, puique $L_1 \cup L_2$ est un résiduel de $L_1 \cup L_2$. Cette minoration ne peut être améliorée, en général, d' après la question 3.
5- Notons $\|\mathcal{A}\|$ le nombre d'états d'un automate fini. Lorsque $\mathcal{A}$ est un automate fini déterministe complet, $\|\mathcal{A}\| \leq \mathrm{Card}(\mathbb{Q}(L(\mathcal{A})))$. On déduit donc des questions 2,4 l'encadrement :

$$1 \leq \|\mathcal{A}_3\| \leq \|\mathcal{A}_1\| \cdot \|\mathcal{A}_2\|.$$

Exercice 2 [6 points]

$$\begin{array}{rcll}
S & \to & UTV & \\
T & \to & aTa \mid bTb \mid \#U & \\
U & \to & \varepsilon \mid W\#U & [U = (W\#)^*] \\
V & \to & \varepsilon \mid \#WV & [V = (\#W)^*] \\
W & \to & \varepsilon \mid aW \mid bW & [W = X^* \text{ où } X = \{a, b\}]
\end{array}$$

Exercice 3 [6 points]
0-Simplification :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
S & \to & aSU \mid bSU \mid TT \\
T & \to & UcU \mid c \\
U & \to & aU \mid bU \mid \epsilon
\end{array}\right.$$

1-Suppression des ε et des chaînes :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
S & \to & aS \mid bS \mid aSU \mid bSU \mid TT \\
T & \to & UcU \mid Uc \mid cU \mid c \\
U & \to & a \mid b \mid aU \mid bU
\end{array}\right.$$

2- FN de Chomsky :

$$\begin{cases} A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & b \\ C & \rightarrow & c \\ M & \rightarrow & UC \\ N & \rightarrow & SU \\ S & \rightarrow & AS \mid BS \mid AN \mid BN \mid TT \\ T & \rightarrow & MU \mid UC \mid CU \mid c \\ U & \rightarrow & a \mid b \mid AU \mid BU \end{cases}$$

3- Langage engendré :
$\mathrm{L}_G(U) = (a+b)^*$, $\mathrm{L}_G(T) = (a+b)^*c(a+b)^*$, $\mathrm{L}_G(S) = (a+b)^*c(a+b)^*c(a+b)^*$.

Exercice 4 [6 points]

1- $L_1 = a^*b^*c^*d^*$ est décrit par une expression régulière, il est donc régulier.

2- Supposons L_2 algébrique, alors $\exists p \forall s \in L_2$, le lemme d'itération soit satisfait. Soit $s = a^p b^p c^p d^p$, $\exists u, v, x, y, z / s = uvxyz, |vxy| \leq p, |vy| \geq 1$ et $\forall i \in \mathbb{N}, uv^i xy^i z \in L_2$. Les vy possibles sont : a^m (impossible, $uv^2xy^2z = a^{p+k}b^pc^pd^p | k > 0$), $a^l b^m$ (impossible, $uv^2xy^2z = a^{p+k}b^{p+r}c^pd^p | k, r > 0$), b^m (impossible, $uv^2xy^2z = a^pb^{p+k}c^pd^p | k > 0$), ... dans tous les cas, uv^2xy^2z n'est pas un mot de L_2 ; L_2 n'est donc pas algébrique.

3- Si L_3 était algébrique, alors toute intersection avec un langage régulier donnerait un langage algébrique. Or, L_1 est régulier et $L_3 \cap L_1 = L_2$, qui n'est pas algébrique ; L_3 n'est donc pas algébrique.

Exercice 5 [6 points]

1- h est un homomorphisme (vu en cours).

2- $k(a_1) = -1(\text{mod}3) = 2(\text{mod}3)$. Donc $k(a_1) \neq a_2$. L'application k n' est donc pas un homomorphisme de F-algèbre.

3.1 $h_2(f(a,a)) = 2$, $h_2(f(f(a,a), f(a,a))) = 1$

3.2 $h_2(f(f(a,a),a)) = 3(\text{mod}3) = 0$

3.3 $h_2(f(t_1,t_2)) = h_2(t_1) + h_2(t_2)(\text{mod}3) = 0 + 0 = 0$. Il est donc vrai que $f(t_1,t_2) \in L$.
$h_2(f(f(t_1,a), f(t_2,a))) = 0 + 1 + 0 + 1 = 2 \neq 0(\text{mod}3)$. Donc $h_2(f(f(t_1,a), f(t_2,a))) \in L$ est impossible.
Choisissons $t' = f(a,a)$. On a $h_2(t') = 2$. Donc $h_2(f(t_1, f(t_2, f(t',a)))) = 0 + 0 + 2 + 1(\text{mod } 3) = 0(\text{mod}3)$, ce qui assure que $f(t_1, f(t_2, f(t',a))) \in L$.