Géométrie Algorithmique
Problèmes

Géraud Sénizergues

Année 2003-2004 [1]

[1]dernière mise à jour :27 avril 2004

Table des matières

Chapitre 1

DS, Novembre 2000

Problème 1

Pour tout polytope $\mathcal{P}$ et tout entier $j \geq 1$, on note $n_j(\mathcal{P})$ le nombre de j-faces de $\mathcal{P}$. Le but de ce problème est de montrer que toute relation affine

$$\sum_{j=0}^{d-1} \lambda_j \cdot n_j(\mathcal{P}) + \lambda_d = 0 \tag{1.1}$$

vérifiée par tout polytope $\mathcal{P}$ de dimension d, est proportionnelle à la relation d'Euler.

Enveloppe convexe

Soit $\mathcal{Q}$ un polytope de dimension $d-1$ dans E^d. Notons H l'hyperplan affine engendré par $\mathcal{Q}$. Soit P un point de E^d n'appartenant pas à H.
0- Vérifier que $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$ est un polytope de dimension d.
1- Montrer que toute face de $\mathcal{Q}$ est une face de $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$.
2- Montrer que, si G est une face de $\mathcal{Q}$, alors $conv(G \cup \{P\})$ est une face de $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$.
3- Décrire l'ensemble des faces de $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$ à partir de l'ensemble des faces de $\mathcal{Q}$.

4- Pour tout $j \in [0, d-1]$, exprimer $n_j(conv(\mathcal{Q} \cup \{P\}))$ en fonction de $n_j(\mathcal{Q})$ et $n_{j-1}(\mathcal{Q})$.

On considère maintenant deux points $P \in H^+, P' \in H^-$, qui sont symétriques par rapport à H et dont la projection orthogonale sur H est un point Ω de l'intérieur relatif de $\mathcal{Q}$. On considère les deux d-polytopes :

$$\mathcal{C} = conv(\mathcal{Q} \cup \{P\}) \text{ et } \mathcal{D} = conv(\mathcal{C} \cup \{P'\}).$$

5- Montrer que $\mathcal{Q}$ est une face de $\mathcal{C}$. De quelle couleur est-elle par rapport à P' ?
6- Soit G une face propre de $\mathcal{Q}$. On sait que G et $conv(G \cup \{P\})$ sont des faces de $\mathcal{C}$ (questions 1, 2).
6.1- De quelle couleur est $conv(G \cup \{P\})$ par rapport à P' ?
6.2- De quelle couleur est G par rapport à P' ?
7- Pour tout $j \in [0, d-2]$, exprimer $n_j(\mathcal{D})$ en fonction de $n_j(\mathcal{Q})$ et $n_{j-1}(\mathcal{Q})$.
8- exprimer $n_{d-1}(\mathcal{D})$ en fonction de $n_{d-2}(\mathcal{Q})$.

Relation d'Euler

On rappelle que , si l'on choisit

$$\lambda_j = (-1)^j \quad (\text{ pour } 0 \leq j \leq d-1) \text{ et } \lambda_d = -1 + (-1)^d$$

la relation (**??**) est vérifiée par tout polytope $\mathcal{P}$ de dimension d.
On note maintenant $(e_0, \ldots, e_{d-1}, e_d)$ cette valeur particulière de $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)$.
On note P(d) la propriété suivante :
*pour tout vecteur $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, si la relation (**??**) est vérifiée par tout polytope $\mathcal{P}$ de dimension d, alors $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)$ est colinéaire à $(e_0, \ldots, e_{d-1}, e_d)$.*
9- Vérifier que P(1) est vraie.
10- En utilisant la question 4, montrer que si $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)$ définit une relation (**??**) valide pour tout polytope de dimension d, alors

$$(\lambda_0 + \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \ldots, \lambda_{d-2} + \lambda_{d-1}, \lambda_{d-1} + \lambda_d + \lambda_0)$$

définit une relation (**??**) valide pour tout polytope de dimension $d - 1$.
11- En utilisant les questions 7-8, partant d'un vecteur $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)$ qui

définit une relation (**??**) valide pour tout polytope de dimension d, construire un vecteur $(\mu_0, \ldots, \mu_{d-2}, \mu_{d-1})$, qui définit une relation (**??**) valide pour tout polytope de dimension $d-1$.
12- Montrer que $\mathrm{P}(d-1) \Rightarrow \mathrm{P}(d)$.

Un corrigé du DS de Novembre 2000

Problème 1-corrigé

Etudions les relations de la forme :

$$\sum_{j=0}^{d-1} \lambda_j \cdot n_j(\mathcal{P}) + \lambda_d = 0 \qquad (1.2)$$

Enveloppe convexe

0- Soit $\mathcal{S}(\mathcal{Q})$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{Q}$. L'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{Q}) \cup \{P\}$ est fini et $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\}) = conv(\mathcal{S}(\mathcal{Q}) \cup \{P\})$ est bien un polytope. Comme $P \notin H$, le sous-espace affine engendré par $\mathcal{Q} \cup \{P\}$ est E^d tout entier, donc $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$ est de dimension d.
1- Soit G une face de $\mathcal{Q}$. Soit $K \subset H$ un hyperplan de H, qui est support de $\mathcal{Q}$ suivant G. Posons $K' = Aff(K \cup \{P\})$.
K' est un hyperplan de E^d. Notons K'^+ le demi-espace de E^d, limité par K' et contenant $\mathcal{Q}$. Choisissons un point P'' dans K'^- et posons $K'' = Aff(K \cup \{P''\})$. Comme $\mathcal{Q} \subseteq \overline{K''}^+$ et $P \in K''^+$, G est la face de $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$ définie par l'hyperplan-support K'' (voir figure **??**).

2- Comme $\mathcal{Q} \subseteq K^+$, on a aussi $\mathcal{Q} \subseteq K'^+$ et $P \in K'$. Donc $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$ est incluse dans K'^+.
Comme $P \in K'$ et $\mathcal{Q} \subseteq K'^+$, on a

$$K' \cap conv(\mathcal{Q} \cup \{P\}) = conv((\mathcal{Q} \cap K') \cup \{P\})$$

or $\mathcal{Q} \cap K' = \mathcal{Q} \cap K = G$, donc

$$K' \cap conv(\mathcal{Q} \cup \{P\}) = conv(G \cup \{P\}).$$

$conv(G \cup \{P\})$ est la face de $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$ définie par l'hyperplan-support K'.
3-
$$\mathcal{F}(conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})) = \mathcal{F}(\mathcal{Q}) \cup \{conv(G \cup \{P\}) \mid G \in \mathcal{F}(\mathcal{Q})\}.$$
L'inclusion du membre droit dans le membre gauche résulte des questions 1 et 2.
Soit F une face de $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$ et soit L un hyperplan support de $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})$ suivant F.
Si $P \in L^+$ alors $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\}) \cap L = \mathcal{Q} \cap L$, donc $F \subseteq \mathcal{Q}$, donc F est une face de $\mathcal{Q}$.
Si $P \in L$ alors $conv(\mathcal{Q} \cup \{P\}) \cap L = conv((\mathcal{Q} \cap L) \cup \{P\})$. Posons $G = \mathcal{Q} \cap L = \mathcal{Q} \cap (L \cap H)$. Alors G est une face de $\mathcal{Q}$ et $F = conv(G \cup \{P\})$.
4- Il découle de la question 3 que
$$\forall j \in [0, d-1], n_j(conv(\mathcal{Q} \cup \{P\})) = n_j(\mathcal{Q}) + n_{j-1}(\mathcal{Q}). \tag{1.3}$$
5- H est hyperplan support de $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C} \cap H = \mathcal{Q}$. Comme $\mathcal{C} \subseteq H^+$, alors que $P' \in H^-$, $\mathcal{Q}$ est une face *rouge*.
6- Soit G une face de $\mathcal{Q}$.
6.1- L'hyperplan-support K, introduit à la question 2, passe par P et $\Omega \in Int(\mathcal{Q}, H) \subseteq K^+$. Donc $P' \in K^+$, ce qui montre que l'hyperplan K est bleu. On en déduit que, si G est une facette de $\mathcal{Q}$,alors $conv(G \cup \{P\})$ est une facette bleue de $\mathcal{C}$.
Si $dim(G) \leq d-3$, les facettes de $\mathcal{C}$ contenant G sont les $conv(G' \cup \{P\})$ où G' est une facette de $\mathcal{Q}$ contenant G. Donc toutes les facettes contenant G sont bleues, et G est *bleue*.
6.2- G est incluse dans $\mathcal{Q}$, qui est une facette rouge (qu. 5) et dans $conv(G \cup \{P\})$ qui est une face bleue (qu. 6.1). Donc G est *violette*.
7- Par le lemme 3.3.1 du cours, les faces de dimension j de $\mathcal{D}$ sont
- les faces bleues F de $\mathcal{C}$; une telle face F est de la forme $conv(G \cup \{P\}$, G face de $\mathcal{Q}$
- les faces violettes F de $\mathcal{C}$; une telle face F est une face propre de $\mathcal{Q}$
- les faces de la forme $conv(F \cup \{P'\})$ où F est une face violette de $\mathcal{C}$; F est de la forme $conv(G \cup \{P'\})$, G face de $\mathcal{Q}$

Il y a $n_{j-1}(\mathcal{Q})$ faces de type 1,$n_j(\mathcal{Q})$ faces de type 2, $n_{j-1}(\mathcal{Q})$ faces de type 3. Donc, pour $j \in [0, d-2]$,
$$n_j(\mathcal{D}) = n_j(\mathcal{Q}) + 2n_{j-1}(\mathcal{Q}) \tag{1.4}$$
8- Pour $j = d-1$, le nombre de faces de type 2 devient nul, donc
$$n_{d-1}(\mathcal{D}) = 2n_{d-2}(\mathcal{Q}). \tag{1.5}$$

Relation d'Euler

9- Supposons que $\lambda_0 \cdot n_0(\mathcal{P}) + \lambda_1 = 0$ pour tout polytope $\mathcal{P}$ de dimension 1. Cela revient à $2\lambda_0 + \lambda_1 = 0$, ce qui revient à dire que $(\lambda_0, \lambda_1) \sim (1, -2)$ où (1,-2) est bien le vecteur des coefficients de la relation d'Euler. Donc P(1) est vraie.
10- Supposons que $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)$ définit une relation (**??**) valide pour tout polytope de dimension d. Soit $\mathcal{Q}$ un polytope quelconque, de dimension $d-1$. Alors le polytope $\mathcal{C}$ construit dans la partie 1 est de dimension d. Il vérifie donc la relation (**??**). En remplaçant, dans cette relation, les $n_j(\mathcal{C})$ par leur expression en fonction de $\mathcal{Q}$ (c.f. question 4) on obtient :

$$\sum_{j=0}^{d-1} \lambda_j \cdot [n_j(\mathcal{Q}) + n_{j-1}(\mathcal{Q})] + \lambda_d = 0$$

En réorganisant les termes, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{d-2} n_j(\mathcal{Q})(\lambda_{j+1} + \lambda_j) + \lambda_0 n_{-1}(\mathcal{Q}) + \lambda_{d-1} n_{d-1}(\mathcal{Q}) + \lambda_d = 0$$

ce qui revient à

$$\sum_{j=0}^{d-2} n_j(\mathcal{Q})(\lambda_{j+1} + \lambda_j) + [\lambda_0 + \lambda_{d-1} + \lambda_d] = 0$$

Le vecteur de coefficients

$$(\lambda_0 + \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \ldots, \lambda_{d-2} + \lambda_{d-1}, \lambda_{d-1} + \lambda_d + \lambda_0) \tag{1.6}$$

définit donc une relation (**??**) valide pour tout polytope de dimension $d-1$.
11- En remplaçant, dans le calcul précédent, le polytope $\mathcal{C}$ par le polytope $\mathcal{D}$ et les formules de la question 4 par celles des questions 7-8, on prouve que :

$$(\lambda_0 + 2\lambda_1, \lambda_1 + 2\lambda_2, \ldots, \lambda_{d-2} + 2\lambda_{d-1}, \lambda_d + 2\lambda_0) \tag{1.7}$$

définit une relation (**??**) valide pour tout polytope de dimension $d-1$.
12- Supposons que P$(d-1)$ est vraie. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)$ le vecteur des coefficients d'une relation (**??**) valide pour tout polytope de dimension d. En appliquant P$(d-1)$ aux vecteurs (**??**) et (**??**) on obtient

$$(\lambda_0+\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2, \ldots, \lambda_{d-2}+\lambda_{d-1}, \lambda_{d-1}+\lambda_d+\lambda_0) \sim ((-1)^0, (-1)^1, \ldots, (-1)^{d-2}, -1+(-1)^{d-1}) \tag{1.8}$$

$$(\lambda_0+2\lambda_1, \lambda_1+2\lambda_2, \ldots, \lambda_{d-2}+2\lambda_{d-1}, \lambda_d+2\lambda_0) \sim ((-1)^0, (-1)^1, \ldots, (-1)^{d-2}, -1+(-1)^{d-1}) \tag{1.9}$$

Les relations de proportionnalité **??** et **??** fournissent, par différence :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_0 - \lambda_{d-1}) \sim ((-1)^0, (-1)^1, \ldots, (-1)^{d-2}, -1 + (-1)^{d-1}) \tag{1.10}$$

cas 1 : $\forall j \in [1, d-1], \lambda_j = 0$.
Dans ce cas la relation (**??**) entraine que $\lambda_0 = 0$, puis la relation (**??**) entraine que $\lambda_d = 0$. Donc $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)$ est colinéaire au vecteur $(e_0, e_1, \ldots, e_{d-1}, e_d)$.
cas 2 : $\exists j \in [1, d-1], \lambda_j \neq 0$.
A un coefficient de proportionnalité près, on peut alors supposer que

$$\exists j \in [1, d-1], \lambda_j = (-1)^j.$$

Le coefficient de proportionnalité dans (**??**) vaut donc -1 et

$$\forall j \in [1, d-1], \lambda_j = (-1)^j$$

De plus $\lambda_0 - \lambda_{d-1} = 1 - (-1)^{d-1}$ donc

$$\lambda_{d-1} = (-1)^{d-1}.$$

En reportant ces valeurs dans la première composante de la relation (**??**), on s'aperçoit que le coefficient de proportionnalité doit valoir (-1). Donc , d'après la dernière composante de (**??**), $\lambda_d + 2\lambda_0 = -(-1 + (-1)^{d-1})$, soit

$$\lambda_d = -1 + (-1)^d.$$

Donc P(d) est vraie.

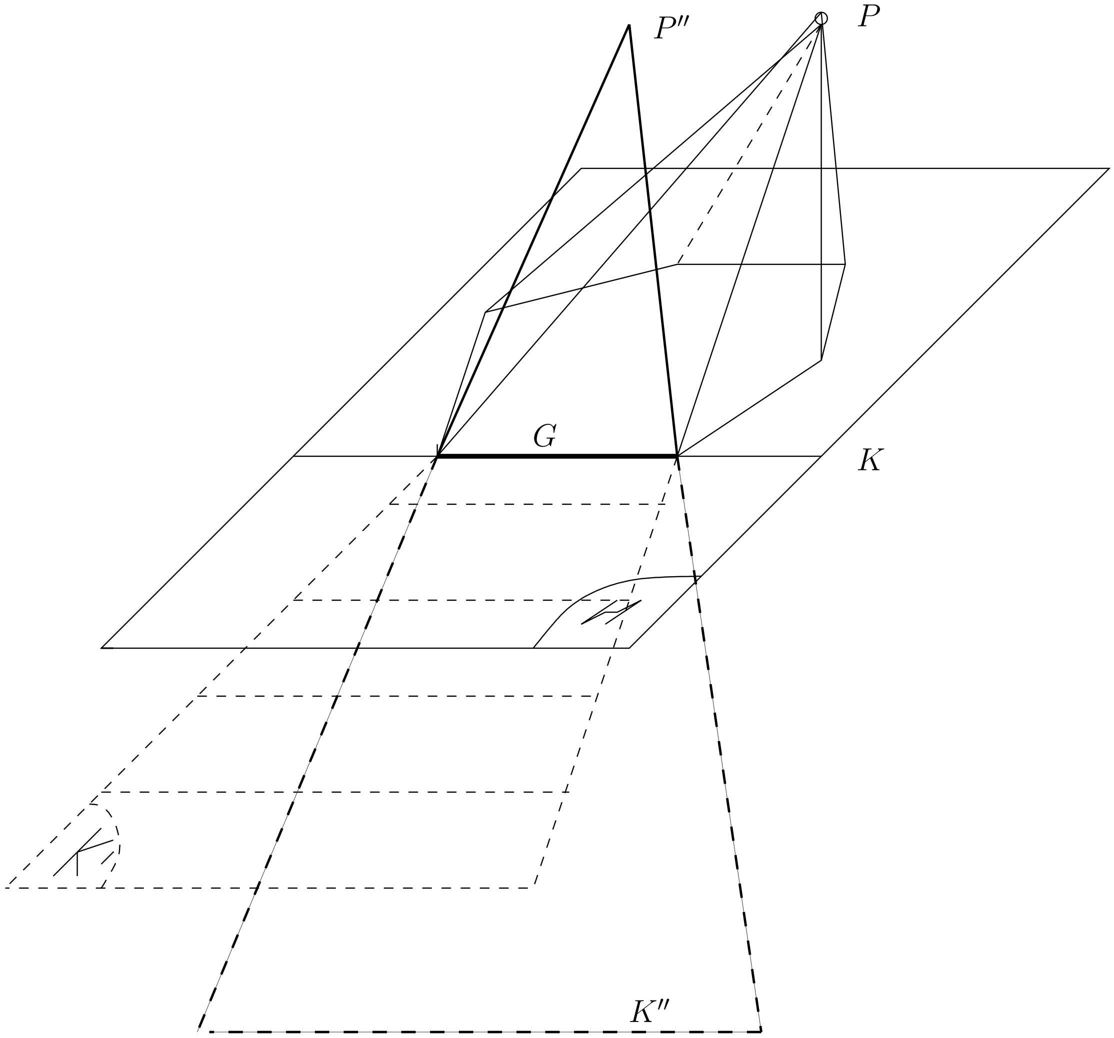

Fig. 1.1 –

Chapitre 2

Examen, Janvier 2001

Exercice

Soit $\mathcal{P}$ un d-polytope simplicial à n sommets $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. On suppose que l'on connaitune liste des facettes de $\mathcal{P}$: chaque facette est donnée par l'ensemble de ses d sommets.
1- Montrer que le graphe d'incidence $\mathcal{G}$ de $\mathcal{P}$ est entièrement déterminé par ces données.
2-Esquisser un algorithme de construction de $\mathcal{G}$ à partir de la liste des facettes, qui fonctionne en temps $\mathrm{O}(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.

On suppose maintenant que $\mathcal{P}$ est un d-polytope *non-nécessairement* simplicial. Pour toute face F on note $\mathcal{S}(F)$ l'ensemble des sommets de F.

3- Montrer que, pour toutes faces F, K de $\mathcal{P}$, on a :

$$\mathcal{S}(F \cap K) = \mathcal{S}(F) \cap \mathcal{S}(K).$$

4- Montrer que, pour toutes faces F, K de $\mathcal{P}$, on a :

$$F \subseteq K \Leftrightarrow \mathcal{S}(F) \subseteq \mathcal{S}(K).$$

5- Montrer que l'ensemble des faces de $\mathcal{P}$ est entièrement déterminé par la liste des facettes.

6- Montrer que la relation d'incidence entre faces est entièrement déterminée par la liste des facettes.
7-Esquisser un algorithme de construction de $\mathcal{G}$ à partir de la liste des facettes.

Problème 3

Polytopes cycliques

On rappelle la formule du "déterminant de Vandermonde" : pour tous réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$,

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^d \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \alpha_d^2 & \ldots & \alpha_d^d \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Pour tout réel $\tau \in \mathbb{R}$ on note $M(\tau)$ le point de E^d :

$$M(\tau) = (\tau, \tau^2, \ldots, \tau^d)$$

et on définit la "courbe des moments" $\mathcal{M}_d$ par

$$\mathcal{M}_d = \{M(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\}.$$

On considère n réels distincts $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Soit $\mathcal{P} = conv(\{M(\tau_1), M(\tau_2), \ldots, M(\tau_n)\})$
On appelle *polytope cyclique* un tel polytope.
Soit $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$et soit $P_J(\tau)$ la fonction polynomiale :

$$\tau \mapsto P_J(\tau) = \prod_{j \in J} (\tau - \tau_j)^2.$$

1- Montrer que, si $Card(J) \leq d/2$, alors il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^d$ et un réel $h_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, P_J(\tau) = u \cdot M(\tau) - h_0$$

(ici, $u \cdot v$ dénote le produit scallaire euclidien).
2- Montrer que l'hyperplan H de E^d, d'équation $u \cdot X - h_0 = 0$, est support

de $\mathcal{P}$.
3-Décrire la face $\mathcal{P} \cap H$ à partir des points $M(\tau_j)$. Quelle est sa dimension ?
4-Montrer que $\mathcal{P}$ possède C_n^k $(k-1)$-faces, pour tout $k \in [0, d/2]$.
5-Montrer l'existence d'un polytope de E^d qui possède C_n^k $(d-k)$-faces, pour tout $k \in [0, d/2]$.
6- Que peut-on déduire de la question 5 concernant le "théorème de la borne supérieure" énoncé en cours ?

Enveloppe convexe et quadriques

On suppose ici que $d = 2p$.
On pose maintenant

$$M'(\tau) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot (\cos(\tau), \sin(\tau), \cos(2\tau), \sin(2\tau), \ldots, \cos(p\tau), \sin(p\tau))$$

$$\mathcal{M'}_d = \{M'(\tau) \mid \tau \in [0, \pi/2]\}.$$

6- Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\tau_0) & \sin(\tau_0) & \ldots & \cos(p\tau_0) & \sin(p\tau_0) \\ 1 & \cos(\tau_1) & \sin(\tau_1) & \ldots & \cos(p\tau_1) & \sin(p\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \\ 1 & \cos(\tau_d) & \sin(\tau_d) & \ldots & \cos(p\tau_d) & \sin(p\tau_d) \end{vmatrix} = K \cdot \prod_{0 \leq i < j \leq d} \sin(\frac{1}{2}(\tau_j - \tau_i))$$

où K est un réel non-nul que l'on précisera.
7- Soit $\mathcal{P}' = conv(\{M'(\tau_1), M'(\tau_2), \ldots, M'(\tau_n)\})$ et $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Notons $k = Card(J)$ et soit $\tau \mapsto P'_J(\tau)$ la fonction :

$$\tau \mapsto P'_J(\tau) = \prod_{j \in J} \sin^2(\tau - \tau_j).$$

Montrer qu'il existe des réels λ_ℓ, μ_ℓ, pour $\ell \in [0, 2k]$ tels que

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, P'_J(\tau) = \sum_{\ell=0}^{2k} \lambda_\ell \cos(\ell\tau) + \mu_\ell \sin(\ell\tau).$$

8- Montrer que le polytope $\mathcal{P}'$ a C_n^k $(k-1)$-faces , pour tout $k \in [0, d/2]$.
(On s'inspirera des questions 2,3,4).
9-En déduire une version aussi fine que possible du théorème de la borne

supérieure, pour des polytopes de E^d à sommets sur $\mathbb{S}^{d-1}$ (la sphère, d'équation : $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 - 1 = 0$).

On rappelle que *l'espace projectif orienté* $\mathbb{P}_o^d = \mathbb{R}^{d+1} - \{0\}/\sim$ est défini par la relation d' équivalence :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^{d+1} - \{0\}, u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}, u = \lambda \cdot v.$$

On rappelle que E^d est plongé dans $\mathbb{P}_o^d$ par l'application :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) \mapsto [(x_1, x_2, \ldots, x_d, 1)]_\sim. \tag{2.1}$$

On identifie donc, dans ce qui suit, E^d avec son image dans $\mathbb{P}_o^d$ par l'application (**??**).
On définite deux quadriques $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2$ de $\mathbb{P}_o^d$ par leurs équations :

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{d-1}^2 + x_d^2 - x_{d+1}^2 = 0 \;\; (\mathbb{Q}_1)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{d-1}^2 - x_d x_{d+1} = 0 \;\; (\mathbb{Q}_2)$$

10-Vérifier que $\mathbb{Q}_1 \cap E^d = \mathbb{S}^{d-1}$.
Montrer que $\mathbb{Q}_2 \cap E^d$ est un paraboloïde. On le notera $\mathcal{P}^{d-1}$.

On définit les formes bilinéaires symétriques sur R^{d+1} :

$$B_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{d-1} y_{d-1} + x_d y_d - x_{d+1} y_{d+1}$$

$$B_2(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{d-1} y_{d-1} - \frac{1}{2} x_d y_{d+1} - \frac{1}{2} x_{d+1} y_d$$

11-Quelle relation y-a-t-il entre B_i et $\mathbb{Q}_i$ $(i \in [1, 2])$?
12-Vérifier que les formes B_1, B_2 sont équivalentes, c'est à dire, qu'il existe un isomorphisme d'espace vectoriel $\psi : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{d+1}, \;\; B_1(\psi(x), \psi(y)) = B_2(x, y).$$

Pour tout isomorphisme $\psi : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ on note $\bar{\psi} : \mathbb{P}_o^d \to \mathbb{P}_o^d$ l'application obtenue en “passant au quotient :

$$\bar{\psi}([u]_\sim) = [\psi(u)]_\sim.$$

On appelle “homographie” une telle application.
13- Montrer qu'il existe une homographie transformant $\mathbb{Q}_2$ en $\mathbb{Q}_1$.
Existe-t-il un isomorphisme affine de E^d dans E^d transformant $\mathcal{P}^{d-1}$ en $\mathbb{S}^{d-1}$?
14- Donner une version aussi fine que possible du théorème de la borne supérieure pour des polytopes de $\mathbb{P}_o^d$ à sommets sur $\mathbb{Q}_2$.

Complexe de Delaunay

15- On note $\Omega = [0, 0, \cdots, 1, 0]_\sim$ (le “point à l'infini” dans la direction Ox_d).
Montrer qu'il existe un polytope, à n sommets, dont tous les sommets sont sur $\mathbb{Q}_2$,dont le $n$ième sommet est Ω et qui a la propriété de la question 4.
16- En déduire que le nombre maximum de faces du complexe de Delaunay d'un ensemble de $n-1$ points dans E^{d-1} est $\theta(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.
17- Même question pour le complexe de Voronoï.

Chapitre 3

Examen, Septembre 2001.

Tous documents autorisés
Durée : 2 heures

Problème 4

Le but du problème est d'analyser le *complexe de Voronoï* en dimension 2 puis de *réduire* plusieurs problèmes géométriques, à la construction de ce complexe.

Complexe de Voronoï

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble fini de n points distincts ($n \geq 3$) :
$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Pour chaque entier $i \in [1, n]$, on pose

$$\mathrm{V}(p_i) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \forall j \in [1, n], \mathrm{d}(p, p_i) \leq \mathrm{d}(p, p_j)\},$$

où d dénote la distance euclidienne.
Le *complexe de Voronoï* de S est alors l'ensemble de polygones :

$$\mathcal{V}(S) = \{\mathrm{V}(p_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Notons $H(p_i, p_j)$ le demi-plan de frontière la médiatrice de p_i, p_j et contenant p_i (pour $i, j \in [1, n], i \neq j$).
1- Décrire l'ensemble de points $\mathrm{V}(p_i)$ comme une intersection de demi-plans. Montrer que chaque arête (i.e. facette, en dimension 2) de $\mathrm{V}(p_i)$ est supportée par une médiatrice de deux points de S.
(On pourra restreindre la preuve au cas où $\mathrm{V}(p_i)$ est bornée et admettre le résultat lorsqu'elle est non-bornée).

On suppose désormais que S est en position :
-*affine-générale* : il n'existe aucun 3-uplet de points distincts de S , (p, q, r), qui soient alignés
et aussi
- L_2-*générale* : il n'existe aucun 4-uplet de points distincts de S , (p, q, r, s), qui soient cocycliques.

2-
2.1 Montrer que par tout sommet de $\mathcal{V}(S)$ passent exactement trois arêtes de $\mathcal{V}(S)$.
2.2 Notons n_i le nombre de faces de dimension i de $\mathcal{V}(S)$. Majorer n_0 (resp. n_1) par une fonction linéaire de $n_2 = n$.
3-Soit v un sommet de $\mathcal{V}(S)$, soit $C(v)$ le cercle centré en v passant par les trois points de S et soit $D(v)$ le disque bordé par $C(v)$. Montrer que l'intérieur de $D(v)$ ne contient aucun point de S.
4-Montrer que, si p_j est un plus proche voisin de p_i dans S, alors la médiatrice de (p_i, p_j) supporte une arête du polygone $\mathrm{V}(p_i)$.
Indication : On peut considérer l'intersection u du segment $[p_i, p_j]$ avec la frontière de $\mathrm{V}(p_i)$. Si u n'est pas le milieu v de $[p_i, p_j]$, montrer que l'on aboutit à une contradiction. (Voir la figure **??**).
5- Soit $v \in \mathrm{conv}(()S)$ (l'enveloppe convexe de S). Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
(i) v n'est pas un sommet de $\mathrm{conv}(()S)$;
(ii) il existe trois points distincts $p, q, r \in S$ tels que,
$v \in \mathrm{conv}(()\{p, q, r\}) - \{p, q, r\}$;

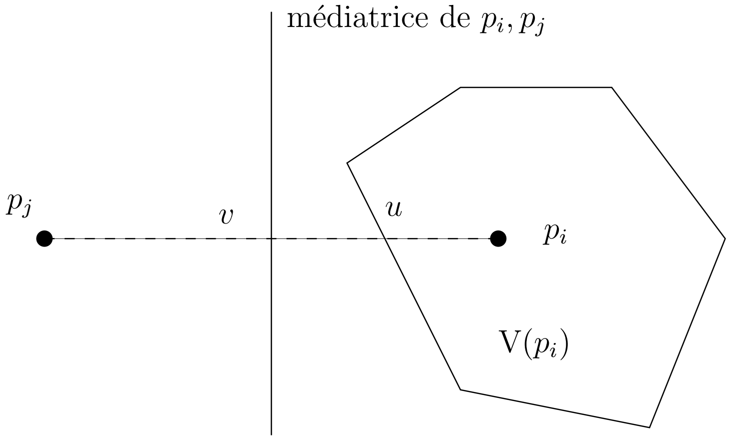

FIG. 3.1 – question 4

(iii) il existe $k \geq 3$ points distincts $q_1, q_2, \ldots, q_k \in S$ tels que,
$v \in \text{conv}(()\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}) - \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$;
6-Montrer que, si p_i n'est pas un sommet de conv$(()S)$, alors $\mathrm{V}(p_i)$ est bornée.
Indication : Si p_i n'est pas un sommet, par la condition (ii) de la qu.5, p_i est

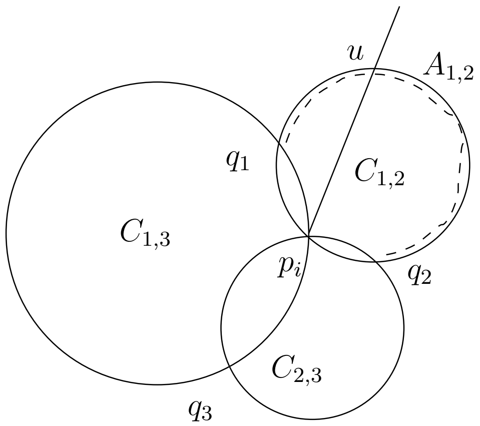

FIG. 3.2 – question 6

un élément d'un conv$(()\{q_1, q_2, q_3\}) - \{q_1, q_2, q_3\}$. Soient $C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,2}$ les cercles passant respectivement par (p_i, q_1, q_2), (p_i, q_1, q_3),(p_i, q_2, q_3).Notons

$A_{1,2}$ l'arc du cercle $C_{1,2}$ d'extrémités p_1, p_2, ne contenant pas p_i. Montrer que tout point u de $C_{1,2}$ est plus proche de q_1 ou q_2 que de p_i. En déduire que $\mathrm{V}(p_i)$ est incluse dans l'union des disques bordés par $C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,3}$. (Voir la figure **??**).
7-Montrer que, si $\mathrm{V}(p_i)$ est bornée, alors p_i n'est pas un sommet de $\mathrm{conv}(()S)$.
Indication : On considérera les points $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$, $k \geq 3$, dont les cellules $\mathrm{V}(p_{i_j})$ ont une intersection non-vide avec $\mathrm{V}(p_i)$.

Réductions

8- Donner une réduction, de complexité linéaire, de la construction de l'enveloppe convexe de S à la construction de $\mathcal{V}(S)$.
Indication : On pourra
- chercher une première arête infinie e
- la face à droite de e, lorsque l'on de déplace vers l'extrémité (finie) de e est de la forme $\mathrm{V}(p_i)$; p_i est alors un sommet de $\mathrm{conv}(()S)$ (pourquoi ?)
- poursuivre ce parcours pour obtenir le sommet p_j suivant (en tournant dans le sens trigonométrique).

9-On considère le problème suivant, noté PPV :
Donnée : une partie finie $S \subseteq \mathbb{R}^2$.
Calculer : pour tout élément $p \in S$, un plus proche voisin $p' \in S$.
(p' est un *plus proche voisin* signifie que $\mathrm{d}(p, p') = \min\{\mathrm{d}(p, q) \mid q \in S - \{p\}\}$).
Donner une réduction, de complexité linéaire, du problème PPV sur S à la construction de $\mathcal{V}(S)$.
10-On considère le problème suivant , noté PPP :
Donnée : une partie finie $S \subseteq \mathbb{R}^2$.
Calculer : une plus proche paire $(p, q) \in S \times S$.
((p, q) est une *plus proche paire* signifie que $p \in S, q \in S, p \neq q$ et
$\mathrm{d}(p, q) = \min\{\mathrm{d}(p', q') \mid p, q \in S, p \neq q\}$).
Donner une réduction, de complexité linéaire, du problème PPP sur S à la construction de $\mathcal{V}(S)$.
11- On admet que le problème de la construction du complexe de Voronoï a une solution en $O(nlog(n))$ où n est le nombre de points de S.
On considère le problème suivant :
Donnée : deux parties finies $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Calculer : la distance de A à B :

$$\mathrm{d}(A, B) = \min\{\mathrm{d}(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que ce problème a une solution en temps $O(nlog(n))$ où n est le nombre de points de $A \cup B$.

Chapitre 4

Examen, Janvier 2002

Durée : 2 heures
Tous documents autorisés
Les parties 1.5,1.6 peuvent être traitées indépendamment des parties 1.1,1.2,1.3,1.4.

Problème 5

On s'intéresse ici au problème de la décomposition d'un polytope (ou d'un polyèdre) en simplexes dont les sommets sont pris parmi ceux du polytope (resp. du polyèdre).

Définition 4.0.1 *On appelle d-triangulation d'un d-polytope $\mathcal{Q}$, tout d-complexe simplicial $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ vérifiant les deux conditions*

(TR1) $\mid \mathcal{T} \mid = \mathcal{Q}$

(TR2) $\forall i \in [1, n]$ *tout sommet de T_i est un sommet de $\mathcal{Q}$.*

(on rappelle que le domaine $\mid \mathcal{T} \mid$ du complexe $\mathcal{T}$ est l'union de toutes ses faces).

Prisme (/5)

On considère $\mathbb{E}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. On considère, dans $\mathbb{E}^3$, trois points, A_2, B_2, C_2, situés dans le plan Π_0 d'équation $z = 0$, formant un triangle équilatéral. On suppose que l'origine O est le centre du triangle (A_2, B_2, C_2) et que la suite de vecteurs $\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OC_2}$ tourne dans le sens direct. On considère le triangle (A_1, B_1, C_1) obtenu à partir de (A_2, B_2, C_2) par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$. Notons $\mathcal{P} = \mathrm{conv}(\{A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2\})$. $\mathcal{P}$ est un "prisme" (voir la figure **??**).

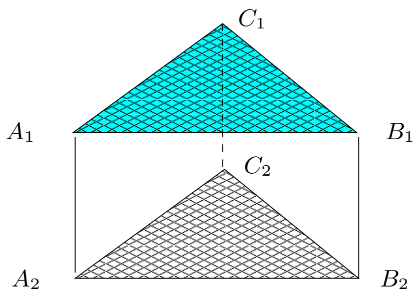

FIG. 4.1 – Le prisme $\mathcal{P}$.

1- Décrire le treillis des faces de $\mathcal{P}$.
2- Donner une 3-triangulation du prisme $\mathcal{P}$.

Polytope (/5)

On considère un nombre réel $0 < \alpha < 2\pi/3$ et le triplet de points (A'_1, B'_1, C'_1) image de (A_1, B_1, C_1) par la rotation d'axe $(O, \overrightarrow{w})$ et d'angle α. On note $\mathcal{P}_\alpha = \mathrm{conv}(\{A'_1, B'_1, C'_1, A_2, B_2, C_2\})$ (voir figure **??**).
3- Décrire le treillis des faces de $\mathcal{P}_\alpha$.
On admettra que, comme on le "voit" sur la figure **??**, $A'_1B_2, B'_1C_2, C'_1A_2$ sont des arêtes de $\mathcal{P}_\alpha$, alors que $B'_1A_2, C'_1B_2, A'_1C_2$ sont des segments dont l'intérieur relatif est inclus dans l'intérieur de $\mathcal{P}_\alpha$.
4- Donner une 3-triangulation de $\mathcal{P}_\alpha$.

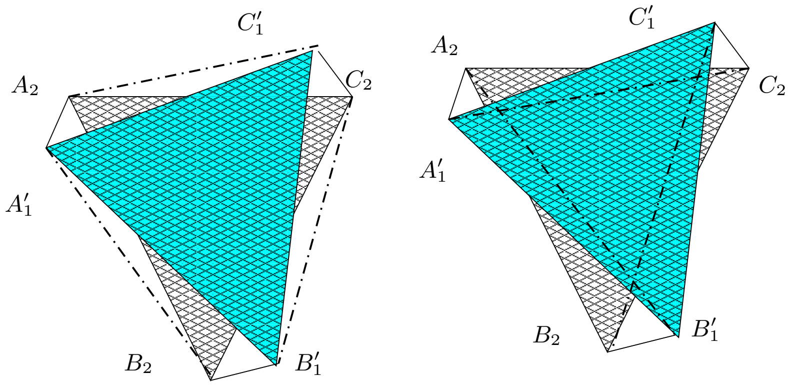

FIG. 4.2 – $\mathcal{P}_\alpha$ (à gauche) ; $\mathcal{S}_\alpha$ (à droite).

Polyèdre (/10)

On considère les segments $(A_1C_2), (B_1A_2), (C_1B_2)$ du prisme. Chacun de ces segments partage une face verticale du prisme en deux triangles. Lorqu'on fait tourner le triangle $(A_1B_1C_1)$ d'un petit angle $\alpha > 0$, chacune des faces verticales du prisme se casse en deux faces triangulaires selon les segments $(A_1'C_2), (B_1'A_2), (C_1'B_2)$. On étudie maintenant la région située à l'intérieur de ces faces triangulaires et des triangles horizontaux $(A_1'B_1'C_1'), (A_2B_2C_2)$.
5- Soit $\mathcal{B}$ la surface union des triangles :

$$(A_1'C_2C_1'), (A_1'C_2A_2), (B_1'A_2A_1'), (B_1'A_2B_2), (C_1'B_2B_1'), (C_1'B_2C_2)$$

et :

$$(A_1'B_1'C_1'), (A_2B_2C_2).$$

On suppose que α est suffisamment petit pour que l'ensemble des faces de tous ces triangles forme un complexe simplicial.(i.e. en termes plus intuitifs, on suppose que $(A_1'C_2C_1')$ ne coupe $(B_1'A_2A_1')$ qu'au point A_1', $(A_1'C_2C_1')$ ne coupe pas $(B_1'A_2B_2)$, etc...) On appelle $\mathcal{S}_\alpha$ l'adhérence de la composante connexe bornée de $\mathbb{E}^3 - \mathcal{B}$ (i.e. en termes plus intuitifs, la région de $\mathbb{E}^3$ “entourée” par $\mathcal{B}$, voir figure **??**).
6- Pourquoi $\mathcal{S}_\alpha$ n'est pas un polytope ?
7- Décrire $\mathcal{S}_\alpha$ à partir de $\mathcal{P}_\alpha$, en lui “enlevant” 3 tétraèdres.

On appelle *polyèdre* de $\mathbb{E}^3$ toute partie de $\mathbb{E}^3$ qui est le domaine d'un complexe simplicial $\mathcal{C}$. On appelle *sommet* du polyèdre tout point $X \in \mathbb{E}^3$ tel

que :
-X est sommet de l'un des simplexes de $\mathcal{C}$, et
-X n'appartient pas à l'intérieur de $|\mathcal{C}|$.
8- Soit Ω le milieu du segment joignant O au centre de $(A_1B_1C_1)$.
8.1- Vérifier que $\mathcal{S}_\alpha$ est l'union des 8 tétraèdres de la forme $(XYZ\Omega)$ où (XYZ) décrit les 8 triangles qui forment $\mathcal{B}$.
8.2- En déduire que $\mathcal{S}_\alpha$ est bien un polyèdre de sommets $A'_1, B'_1, C'_1, A_2, B_2, C_2$.
Remarque : Ω n'est pas un sommet de $\mathcal{S}_\alpha$.

On appelle 3-triangulation d'un polyèdre $\mathcal{Q}$ tout complexe simplicial vérifiant les conditions (TR1),(TR2) déjà énoncées pour les polytopes(voir définition **??**).
9- Montrer que tout simplexe ayant 4 sommets dans $\{A'_1, B'_1, C'_1, A_2, B_2, C_2\}$ a une arête non-incluse dans $\mathcal{S}_\alpha$.
En déduire que $\mathcal{S}_\alpha$ n'a aucune 3-triangulation.

Retour au prisme (/5)

On cherche à montrer que le prisme n'admet *aucune* 3-triangulation contenant un certain ensemble de 3 arêtes disjointes.
On note $P_1, P_2, \ldots, P_8$ des points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $P_i : (x_i, y_i, z_i)$.
10- Montrer que l'ensemble des $(P_1, P_2, \ldots, P_8) \in (\mathbb{E}^3)^8$ tels que "$\mathrm{conv}(P_1, P_2, P_3, P_4), \mathrm{conv}(P_5, P_6, P_7, P_8)$ sont des simplexes disjoints" est ouvert.
Indication : caractériser l'ensemble des coordonnées $(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_8, y_8, z_8) \in \mathbb{R}^{24})$ de ces 8-uples comme l'ensemble des solutions d'une conjonction d'inégalités de la forme :

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_8, y_8, z_8) > 0$$

ou de la forme

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_8, y_8, z_8) \neq 0$$

pour $j \in J$, où J est un ensemble fini et les f_j sont des fonctions polynomiales.
11-Montrer que les ensembles suivants sont ouverts :
$\{(P_1, P_2, \ldots, P_7) \in (\mathbb{E}^3)^7 \mid \mathrm{conv}(P_1, P_2, P_3, P_4), \mathrm{conv}(P_1, P_5, P_6, P_7)$ sont des simplexes d'intersection $\{P_1\}\}$;

$\{(P_1, P_2, \ldots, P_6) \in (\mathbb{E}^3)^6 \mid \text{conv}(P_1, P_2, P_3, P_4), \text{conv}(P_1, P_2, P_5, P_6)$ sont des simplexes d'intersection $\text{conv}(\{P_1, P_2\})\}$;
$\{(P_1, P_2, \ldots, P_5) \in (\mathbb{E}^3)^5 \mid \text{conv}(P_1, P_2, P_3, P_4), \text{conv}(P_1, P_2, P_3, P_5)$ sont des simplexes d'intersection $\text{conv}(\{P_1, P_2, P_3\})\}$.
12- Soit $m \geq 1$. Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'incidence d'un complexe simplicial de dimension 3 dont les 0-faces sont notées $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Montrer que l'ensemble des $(P_1, P_2, \ldots, P_m) \in (\mathbb{E}^3)^m$ tels que $\mathcal{G}$ est bien le graphe d'incidence d'un complexe simplicial dont les 0-faces sont ces points, est un ensemble ouvert.

Considérons l'hypothèse $(\mathcal{H})$ suivante :
le prisme $\mathcal{P}$ admet une 3-triangulation $\mathcal{T}$ contenant les arêtes B_1A_2, C_1B_2, A_1C_2.
13-Montrer que toute 3-triangulation $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}$ contenant les arêtes B_1A_2, C_1B_2, A_1C_2, contient aussi les 8 triangles qui définissent $\mathcal{B}$.
14-Montrer que, sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$,

$$\exists \epsilon > 0, \forall \alpha \in]0, \epsilon[, \mathcal{S}_\alpha \text{ a une 3-triangulation .}$$

15- En déduire que l'hypothèse $(\mathcal{H})$ est fausse.

Polytopes généraux (/10)

Soit $\mathcal{C}$ un 3-polytope dont l'ensemble des sommets est en position générale.
Soit $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ une 3-triangulation de ce polytope.
16- Montrer que, si $0 \leq k \leq 2$, toute k-face de $\mathcal{C}$ est aussi une k-face de $\mathcal{T}$.
Indication : traiter d'abord le cas $k = 2$; soit F une 2-face de $\mathcal{C}$, X son centre de gravité et T_i une 2-face de $\mathcal{T}$ possédant X ; montrer que $F = T_i$.

On considère un point $P \notin \mathcal{C}$. On suppose que l'union des sommets de $\mathcal{C}$ avec le singleton $\{P\}$ est un ensemble de points en position générale.
17- Rappeler quelles sont les faces de $\text{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\})$ en fonction des faces de $\mathcal{C}$ et de leur couleur par rapport à P.
18- Soit F une 2-face rouge de $\mathcal{C}$.
Montrer que $\text{conv}(F \cup \{P\})$ est un 3-simplexe.
19- Soient F, F' des 2-faces de $\mathcal{C}$ et T_i une face de $\mathcal{T}$.
19.1- Que vaut $\text{conv}(F \cup \{P\}) \cap \text{conv}(F' \cup \{P\})$?

19.2- Que vaut $\mathrm{conv}(F \cup \{P\}) \cap T_i$?
20- Montrer que

$$(\bigcup_{i=1}^{n} T_i) \cup (\bigcup_{F,\text{face rouge}} \mathrm{conv}(F \cup \{P\})) = \mathrm{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\})$$

21- Proposer une 3-triangulation $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{C}' = \mathrm{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\})$.
22- Écrire un algorithme (incrémental) de 3-triangulation du polytope engendré par un ensemble de points $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ en position générale.
Indications :
- On s'inspirera de l'algorithme de construction de l'enveloppe convexe étudié en cours,
- on ne détaillera pas les structures de données et les calculs déjà vus en cours ; par contre on précisera quels nouveaux calculs doivent être effectués.
23- Quelle est la complexité de votre algorithme ?
24- Reprendre les questions 21-22 pour des polytopes de dimension d engendrés par des parties $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^d$.
Pour quelles valeurs de d votre algorithme est-il optimal ?

Compacité (/3)

On admet ici que tout d-polytope admet une d-triangulation (même si ses sommets ne sont pas en position générale).

25- Soit $K \subseteq \mathbb{E}^d$ et $X \in \mathrm{conv}(K)$. Montrer qu'il existe des points $P_0, P_1, \ldots, P_d \in K$ tels que $X \in \mathrm{conv}(P_0, P_1, \ldots, P_d)$.
26- Monter que si K est une partie compacte de $\mathbb{E}^d$, alors $\mathrm{conv}(K)$ est compacte.

Chapitre 5

Examen, Septembre 2002

Durée : 2 heures
Tous documents autorisés
On peut admettre les résultats de certaines questions pour les utiliser dans des questions ultérieures

Problème 6

On s'intéresse ici à la construction d'une triangulation particulière d'un polytope : la triangulation *de Delaunay*. On utilise les idées générales du chapitre "complexe de Voronoï" du cours.

Espace des sphères

Dans cette partie, on se place dans l'espace euclidien de dimension d : $\mathbb{E}^d$. Les éléments de $\mathbb{E}^d$ sont dénotés par les lettres $X, Y, Z, \ldots$, ceux de $\mathbb{E}^{d+1}$ par $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \ldots$, ceux de $\mathbb{P}^{d+1}$ (l'espace projectif de dimension $d+1$), par $\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{Z}}, \ldots$, et ceux de $\mathbb{R}^{d+2}$ par $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}, \ldots$.

On rappelle que $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{E}^d) \to \mathbb{E}^{d+1}$ est l'application associant à toute sphère

Σ de $\mathbb{E}^d$, centrée en C, de rayon r, le point

$$\Phi(\Sigma) = (C, \sigma)$$

où σ est la puissance de 0 par rapport à Σ, i.e. $\sigma = C \cdot C - r^2$.
On considère la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $\mathbb{R}^{d+2}$ définie par :

$$Q(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i - \frac{1}{2} x_{d+1} y_{d+2} - \frac{1}{2} x_{d+2} y_{d+1}$$

On définit $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{E}^{d+1}$ comme le sous-ensemble d'équation :

$$\sum_{i=1}^{d} x_i^2 - x_{d+1} = 0.$$

($\mathcal{P}$ est un paraboloïde de révolution autour de l'axe $0x_{d+1}$).
Dans ce qui suit, $\mathbb{E}^d$ est plongé dans $\mathbb{E}^{d+1}$ par $X \mapsto (X, 0)$. L'axe $0x_{d+1}$ de $\mathbb{E}^{d+1}$ est dit "vertical". $\mathbb{E}^{d+1}$ est plongé dans $\mathbb{P}^{d+1}$ par $\bar{X} \mapsto [\bar{X}, 1]_\sim$.
1- Montrer que l'ensemble des image par Φ de toutes les sphères de $\mathbb{E}^d$ est exactement l'ensemble des points de $\mathbb{E}^{d+1}$ qui sont "sous" le paraboloïde $\mathcal{P}$.
On considère la polarité , de $\mathbb{P}^{d+1}$ dans $\mathcal{H}(\mathbb{P}^{d+1})$ par rapport à la forme Q :

$$\bar{\mathbf{A}} \mapsto \bar{\mathbf{A}}^* = \{\bar{\mathbf{X}} \in \mathbb{P}^{d+1} \mid Q(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{X}}) = 0\}.$$

2- Rappeler l'interprétation géométrique de la relation d'orthogonalité par rapport à Q, de deux points $\Phi(\Sigma_1), \Phi(\Sigma_2)$, où Σ_1, Σ_2 sont deux sphères de $\mathbb{E}^d$.
Etant donné un point $X \in \mathbb{E}^d$, on note encore X la sphère de centre X et de rayon nul. Comment s'interprète l'orthogonalité de $\Phi(X_1), \Phi(\Sigma_2)$, pour un point X_1 et une sphère Σ_2 ?
3- Montrer que, pour tout hyperplan H de $\mathbb{E}^{d+1} \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$, le pôle de H, H^*, est dans $\mathbb{E}^{d+1}$ si et seulement si H n'est pas vertical.
4- Montrer que, pour tout hyperplan H de $\mathbb{E}^{d+1}$:

$$H \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad H^* \text{ est en-dessous de } \mathcal{P} \tag{5.1}$$
$$H \cap \mathcal{P} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad H^* \text{ est au-dessus de } \mathcal{P} \tag{5.2}$$
$$H \text{ est tangent à } \mathcal{P} \Leftrightarrow \quad H^* \in \mathcal{P} \tag{5.3}$$

Pour tout hyperplan K de $\mathbb{E}^{d+1}$, on note K^+ (resp. K^-), le demi-espace situé "au-dessus" (resp. "en-dessous") de K.

5- Montrer que, pour tout hyperplan H de $\mathbb{E}^{d+1}$, tout point $\bar{X} \in \mathbb{E}^{d+1}$ et tout $\epsilon \in \{+,-\}$, si H est non-vertical :

$$\bar{X} \in H \quad \Leftrightarrow \quad H^* \in \bar{X}^* \tag{5.4}$$
$$\bar{X} \in H^\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad H^* \in (\bar{X}^*)^\epsilon. \tag{5.5}$$

6- Montrer que, pour toute sphère Σ de $\mathbb{E}^d$ et tout point $X \in \mathbb{E}^d$:

$$X \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(X) \in \Phi(\Sigma)^* \tag{5.6}$$
$$X \in \mathrm{int}(\Sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(X) \in (\Phi(\Sigma)^*)^- \tag{5.7}$$
$$X \in \mathrm{ext}(\Sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(X) \in (\Phi(\Sigma)^*)^+ \tag{5.8}$$

Complexe de Delaunay, en dimension 2

Dans cette partie on fixe $d = 2$. On se donne un ensemble de n points $(n \geq 3)$: $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_i, \ldots, M_n\} \subseteq \mathbb{E}^2$, supposés en position générale, et on cherche à construire le "complexe de Delaunay" de $\mathcal{M}$.
7- Soit H un plan de $\mathbb{E}^3$ passant par 3 points $\Phi(M_{i_1})$, $\Phi(M_{i_2})$,$\Phi(M_{i_3})$,$(1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n)$.
7.1 Montrer que H n'est pas vertical.
7.2 Montrer qu'il existe un cercle $\Sigma \subseteq \mathbb{E}^2$ tel que $H^* = \Phi(\Sigma)$.
7.3 Montrer que ce cercle Σ passe par les 3 points $\Phi(M_{i_1})$, $\Phi(M_{i_2})$,$\Phi(M_{i_3})$.
8- On suppose que 0 est le centre de gravité de $\mathcal{M}$ (on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de repère, ce qui ne prend qu' un temps linéaire).
Donner un algorithme qui calcule un point $\Omega = (0, 0, \omega)$ de $\mathbb{E}^3$, tel que : Ω soit au-dessus de tous les plans supports des facettes de $\mathrm{conv}(\mathcal{M})$.
Quelle est la complexité de votre algorithme ?
On fixe maintenant et jusqu'à la fin de cette partie, un tel point Ω. On définit

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}, \Omega) = \mathrm{conv}(\Phi(\mathcal{M}) \cup \{\Omega\}).$$

9- Soit H un plan support d'une facette de $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \Omega)$, qui ne passe pas par Ω.
9.1 Montrer que $\Omega \in H^+$
9.2 Montrer que $\forall i \in [1, n], \Phi(M_i) \in \overline{H^+}$

9.3 Vérifier qu'il existe un cercle Σ tel que $\Phi(\Sigma)^* = H$.
9.4 Soit $I = \{i \in [1,n] \mid \Phi(M_i) \in H\}$. Montrer que

$$\{M_i, i \in I\} \subseteq \Sigma \text{ et } \{M_i, i \in [1,n] - I\} \subseteq \mathrm{ext}(\Sigma).$$

10- Soit $\mathcal{D}'$ l'ensemble des faces F de $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \Omega)$ qui ne contiennent pas Ω. Montrer que $\mathcal{D}'$ est un complexe cellulaire de dimension 2 .
On note $p : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^2$ la projection verticale de $\mathbb{E}^3$ sur $\mathbb{E}^2$. On définit

$$\mathrm{Del}(\mathcal{M}) = \{p(F') \mid F' \in \mathcal{D}'\}.$$

11- Montrer que $\mathrm{Del}(\mathcal{M})$ est un complexe cellulaire de dimension 2.
12- Montrer que F est une face de dimension 2 de $\mathrm{Del}(\mathcal{M})$ ssi il existe une partie $I \subseteq [1,n]$, de cardinal ≥ 3, et un cercle Σ de $\mathbb{E}^2$ tels que :
D1- $F = \mathrm{conv}(\{M_i \mid i \in I\})$
D2- $\{M_i \mid i \in I\} \subseteq \Sigma$
D3- $\{M_i \mid i \in [1,n] - I\} \subseteq \mathrm{ext}(\Sigma)$
En déduire que $\mathrm{Del}(\mathcal{M})$ ne dépend que de $\mathcal{M}$ (et pas de Ω).
13- Montrer que les sommets de $\mathrm{Del}(\mathcal{M})$ sont exactement les points de $\mathcal{M}$.
14- Montrer que le domaine de $\mathrm{Del}(\mathcal{M})$ est exactement $\mathrm{conv}(\mathcal{M})$.
15- On dit que les points de $\mathcal{M}$ sont en position L^2-générale si ils sont en position générale et si, de plus, il n'existe pas de cercle passant par 4 points distincts de $\mathcal{M}$. Montrer que, si $\mathcal{M}$ est en position L^2-générale, alors $\mathrm{Del}(\mathcal{M})$ est une triangulation de $\mathcal{M}$.
16- En utilisant l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe vu en cours, donner un algorithme de calcul du complexe de Delaunay d'un ensemble $\mathcal{M}$ d'au moins 3 points du plan, en position générale. Quelle est la complexité de votre algorithme ?

Complexe de Delaunay, en dimension d

Reprendre les questions 7 à 16 dans le cas où $d \geq 3$.

Chapitre 6

Examen, Janvier 2003

Durée : 3 heures
Tous documents autorisés

Exercice

Produit de polytopes

Etant donnés deux polytopes $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{E}^p$, $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{E}^q$, on définit leur produit

$$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \{(X, Y) \in \mathbb{E}^p \times \mathbb{E}^q \mid X \in \mathcal{P}, Y \in \mathcal{Q}\}$$

1- Montrer que $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ est un polytope de $\mathbb{E}^{(p+q)}$.
2- Exprimer $\dim(\mathcal{P} \times \mathcal{Q})$ en fonction de $\dim \mathcal{P}$ et $\dim \mathcal{Q}$.
3- Décrire les faces de $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ à partir des faces de $\mathcal{P}$ et des faces de $\mathcal{Q}$.

L' hyper-cube

On considère l'espace $\mathbb{E}^d$, muni d'un repère orthonormé $(O, e_1, e_2, \ldots, e_d)$. Définissons l'ensemble de points

$$C_d = \{X \in \mathbb{E}^d \mid \forall i \in [1, d], -1 \leq x_i \leq 1\}.$$

On appelle cet ensemble *l'hypercube de dimension* d.
4- Montrer que C_d est un polytope.
Exprimer C_d comme le produit de d polytopes de dimension 1.
5- On s' intéresse aux faces de C_d.
5.1- Donner l' ensemble des sommets de C_d.
5.2- Plus générallement, pour $k \in [-1, d]$, décrire les k-faces de C_d. Dénombrer ces k-faces.
5.3- Montrer que le nombre de faces de C_d vaut $3^d + 1$.
6- Résoudre les problèmes algorithmiques suivants. Pour chaque problème, on fournira un algorithme aussi simple que possible et on évaluera sa complexité.
6.1- **Instance** : un vecteur $V \in \mathbb{R}^d$, **Calculer** : un point $X_0 \in C_d$ qui minimise la fonction $X \mapsto V \cdot X$ sur C_d.
6.2- **Instance** : $X \in \mathbb{E}^d$, **Question** : $X \in C_d$?
6.3- **Instance** : un hyperplan $H \subseteq \mathbb{E}^d$, **Question** : $H \cap C_d \neq \emptyset$?
6.4- **Instance** : $X \in \mathbb{E}^d - C_d$, **Calculer** : un hyperplan $H \subseteq \mathbb{E}^d$ tel que $X \in H^+$ et $C_d \subseteq H^-$.

Le permutoèdre

Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_4$ (une permutation des entiers $\{1, 2, 3, 4\}$), on note X_σ le point de $\mathbb{E}^4$ défini par : $X_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \sigma(3) \\ \sigma(4) \end{pmatrix}$. On considère, dans l'espace $\mathbb{E}^4$, le polytope

$$\Pi_3 = \mathrm{conv}(\{X_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{S}_4\})$$

Ce polytope est le *permutoèdre* Π_3.
7- Montrer que $\dim \Pi_3 = 3$.

(On rappelle la formule du déterminant circulant :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{d-1} & a_0 & \dots & a_{d-2} \end{vmatrix} = \prod_{0\leq\ell\leq d-1} (a_0+\omega^{\ell}a_1+\ldots+\omega^{\ell\cdot k}a_k+\ldots+\omega^{\ell\cdot(d-1)}a_{d-1})$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{d}}$).
Dans ce qui suit on dénote toute permutation σ par la suite $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4))$

8- Considérons le point $X_{(1,2,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

8.1- Vérifier que l'hyperplan H d' équation $x_4 = 4$ est support d'une facette F de Π_3, passant par $X_{(1,2,3,4)}$
8.2- Trouver deux autres hyperplans H', H'' déterminant respectivement deux autres facettes F', F'' de Π_3, passant par $X_{(1,2,3,4)}$.
8.3- Vérifier que $\{X_{(1,2,3,4)}\} = F \cap F' \cap F''$
8.4- En déduire que $\{X_{(1,2,3,4)}\}$ est une 0-face de Π_3. Calculer un hyperplan K support de cette face.
9- Décrire le graphe d'incidence de Π_3 (on pourra simplement achever d'

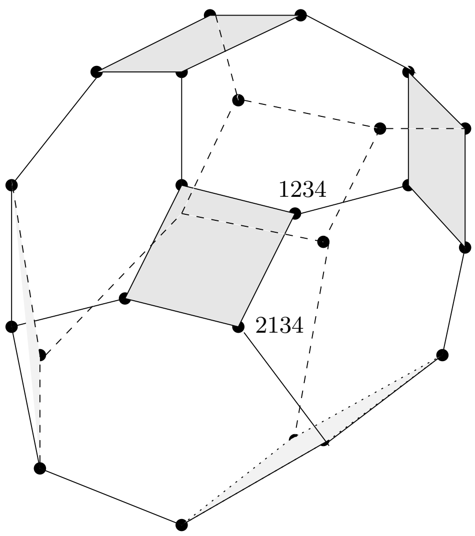

FIG. 6.1 – Le permutoèdre

étiqueter les sommets des faces "visibles" de la figure **??**).
10- Montrer que Π_3 est simple (i.e. que les faces de son polaire sont des simplexes).

Projection de l'hyper-cube sur le permutoèdre

On considère l'ensemble $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{E}^4$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} \;=\; & \frac{5}{2}(\mathbb{1}) + [-\frac{(e_2-e_1)}{2}, \frac{(e_2-e_1)}{2}] + [-\frac{(e_3-e_1)}{2}, \frac{(e_3-e_1)}{2}] + [-\frac{(e_4-e_1)}{2}, \frac{(e_4-e_1)}{2}] \\ & + [-\frac{(e_3-e_2)}{2}, \frac{(e_3-e_2)}{2}] + [-\frac{(e_4-e_2)}{2}, \frac{(e_4-e_2)}{2}] + [-\frac{(e_4-e_3)}{2}, \frac{(e_4-e_3)}{2}].\end{aligned}$$

où $\mathbb{1} = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.
11- Montrer que $\mathcal{Q}$ est un polytope.
12- Montrer que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_4$, $\mathcal{Q}$ est invariant par

$$h_\sigma : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ x_{\sigma(3)} \\ x_{\sigma(4)} \end{pmatrix}.$$

13- Montrer que $\Pi_3 \subseteq \mathcal{Q}$.
14- Soit $\varphi : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall X \in \mathbb{E}^4, \varphi(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ où $0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4$. Montrer que φ atteint un maximum sur $\mathcal{Q}$ en un point unique X_0 que l'on précisera.
15- Généraliser la question 14 à des coefficients $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ (certains des c_i peuvent être négatifs ou nuls). En déduire que $\Pi_3 = \mathcal{Q}$.
16- Exhiber une application affine $p : \mathbb{E}^6 \to \mathbb{E}^4$ telle que $p(C_6) = \Pi_3$.

Exercice

Programmation linéaire : applications géométriques

Nous considérons divers problèmes géométriques. On suppose que les objets donnés en entrée sont "en position générale".
1- Problème du vide pour un $\mathcal{H}$-polytope.
Instance : une suite de demi-espaces $H_1^+, H_2^+, \ldots, H_p^+$ de $\mathbb{E}^d$, avec $p \geq d+1$.

Question : $\mathcal{Q} = \cap_{i=1}^{p} \bar{H}_i^+$ est-il non-vide ?
2- Calcul d'un point intérieur d'un $\mathcal{H}$-polytope.
Instance : une suite de demi-espaces $H_1^+, H_2^+, \ldots, H_p^+$ de $\mathbb{E}^d$, avec $p \geq d+1$.
Calculer : un point de l' intérieur de $\mathcal{Q} = \cap_{i=1}^{p} \bar{H}_i^+$ (s'il en existe)
3- Appartenance à un $\mathcal{V}$-polytope.
Instance : une suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de $\mathbb{E}^d$ (où $p \geq d+1$) et un point $A \in \mathbb{E}^d$.
Question : le point A appartient-il au polytope $\mathrm{conv}(\{A_1, A_2, \ldots, A_p\})$?
4- Test d'extrêmalité.
Instance : une suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de $\mathbb{E}^d$ (où $p \geq d+1$) et un point $A \in \mathbb{E}^d$.
Question : le point A est-il un *sommet* du polytope $\mathrm{conv}(\{A_1, A_2, \ldots, A_p\})$?
5- Lancer de rayon.
Instance : une suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de $\mathbb{E}^d$ et un vecteur $V \in \mathbb{R}^d$. On suppose que O est dans l'intérieur de $\mathcal{P} = \mathrm{conv}(\{A_1, A_2, \ldots, A_p\})$
Question : déterminer une facette F de $\mathcal{P}$ qui est "transpercée" par la demi-droite issue du point O et dirigée par V.
6- Séparation de deux ensembles de points.
Instance : deux ensembles de points $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathbb{E}^d$.
Calculer : un hyperplan H qui sépare $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}_2$, s'il en existe.
(i.e. on cherche H tel que $\mathcal{A}_1 \subseteq H^+$ et $\mathcal{A}_2 \subseteq H^-$).
7- Plus grande sphère incluse dans un $\mathcal{H}$-polytope.
Instance : une suite de demi-espaces $H_1^+, H_2^+, \ldots, H_p^+$ de $\mathbb{E}^d$, avec $p \geq d+1$.
Calculer : une sphère incluse dans $\mathcal{Q} = \cap_{i=1}^{p} \bar{H}_i^+$ et qui ait un rayon maximal. (on suppose ici que $\mathcal{Q}$ est borné).
On donnera une méthode de résolution de chaque problème. On suggère de se ramener à un algorithme de programmation linéaire. Il sera parfois utile d'appliquer la notion de *polarité* sur les convexes. On précisera la complexité de chacune des solutions que l'on proposera.