Université Bordeaux I
Mastère 1, 2006/2007

Algorithmique géométrique : feuille 4

Cubes et Prismes

Exercice 4.1
1- Quels types de polygones obtient-on comme intersection d'un cube avec un plan ?
2- Quels polygones *réguliers* obtient-on de cette façon ?
Exercice 4.2
Soit C un cube noir fixe. Le cube vert V est isométrique à C. Le cube V a les mêmes propriétés que le rayon vert utilisé par les envahisseurs martiens dans "la guerre des mondes " : il annihile toute la matière noire sur son passage.
1- Peut-on trouver un mouvement de translation de V à travers C qui creuse un tunnel dans C mais laisse un objet connexe (une sorte de "rond" de serviette, quoique carré) ?
2- Les martiens font pivoter V à grande vitesse autour d'une grande diagonale de C et lui impriment aussi un mouvement de translation le long de cette diagonale. Que reste-t-il de C après le passage de V ?
Exercice 4.3
On appelle *3-triangulation* d'un polytope $\mathcal{P}$ de dimension 3, tout ensemble de tétraèdres $\{T_1, \ldots, T_n\}$ tel que :
(i) $\bigcup_{i=1}^{n} T_i = \mathcal{P}$
(ii) Pour tous $i, j \in [1, n], T_i \cap T_j$ est une k-face commune de T_i et T_j (où $k \in [0, 2]$)
(iii) Pour tout $i \in [1, n]$, tout sommet de T_i est un sommet de $\mathcal{P}$.
1- Donner une 3-triangulation du cube.
2- Peut-on choisir les tétraèdres T_i de façon qu'ils soient isométriques, 2 à 2 ?
Exercice 4.4
On considère $\mathbb{E}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. On considère, dans $\mathbb{E}^3$, trois points, A_2, B_2, C_2, situés dans le plan Π_0 d'équation $z = 0$, formant un triangle équilatéral. On suppose que l'origine O est le centre du triangle (A_2, B_2, C_2) et que la suite de vecteurs $\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OC_2}$ tourne dans le sens direct. On considère le triangle (A_1, B_1, C_1) obtenu à partir de (A_2, B_2, C_2) par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$. Notons $\mathcal{P} = \text{conv}(\{A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2\})$. $\mathcal{P}$ est un "prisme" (voir la figure 1).

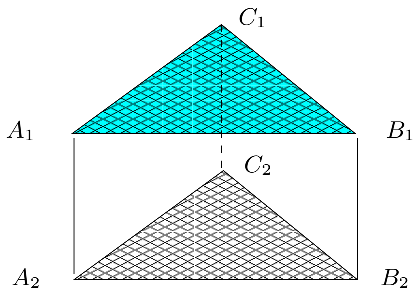

FIG. 1 – Le prisme $\mathcal{P}$.

1- Décrire le treillis des faces de $\mathcal{P}$.
2- Donner une 3-triangulation du prisme $\mathcal{P}$.

Un polytope On considère un nombre réel $0 < \alpha < 2\pi/3$ et le triplet de points (A_1', B_1', C_1') image de (A_1, B_1, C_1) par la rotation d'axe $(O, \overrightarrow{w})$ et d'angle α. On note $\mathcal{P}_\alpha = \text{conv}(\{A_1', B_1', C_1', A_2, B_2, C_2\})$ (voir figure 2).
3- Décrire le treillis des faces de $\mathcal{P}_\alpha$.

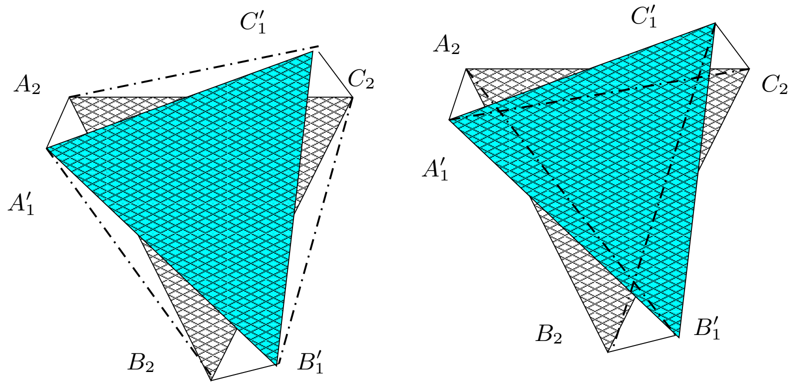

FIG. 2 – $\mathcal{P}_\alpha$ (à gauche) ; $\mathcal{S}_\alpha$ (à droite).

On admettra que, comme on le "voit" sur la figure 2, $A_1'B_2, B_1'C_2, C_1'A_2$ sont des arêtes de $\mathcal{P}_\alpha$, alors que $B_1'A_2, C_1'B_2, A_1'C_2$ sont des segments dont l'intérieur relatif est inclus dans l'intérieur de $\mathcal{P}_\alpha$.
4- Donner une 3-triangulation de $\mathcal{P}_\alpha$.

Le polyèdre de Schönhart On considère les segments $(A_1C_2), (B_1A_2), (C_1B_2)$ du prisme. Chacun de ces segments partage une face verticale du prisme en deux triangles. Lorqu'on fait tourner le triangle $(A_1B_1C_1)$ d'un petit angle $\alpha > 0$, chacune des faces verticales du prisme se casse en deux faces triangulaires selon les segments $(A'_1C_2), (B'_1A_2), (C'_1B_2)$. On étudie maintenant la région située à l'intérieur de ces faces triangulaires et des triangles horizontaux $(A'_1B'_1C'_1), (A_2B_2C_2)$.
5- Soit $\mathcal{B}$ la surface union des triangles :

$$(A'_1C_2C'_1), (A'_1C_2A_2), (B'_1A_2A'_1), (B'_1A_2B_2), (C'_1B_2B'_1), (C'_1B_2C_2)$$

et :

$$(A'_1B'_1C'_1), (A_2B_2C_2).$$

On suppose que α est suffisamment petit pour que l'ensemble des faces de tous ces triangles forme un complexe simplicial.(i.e. en termes plus intuitifs, on suppose que $(A'_1C_2C'_1)$ ne coupe $(B'_1A_2A'_1)$ qu'au point A'_1, $(A'_1C_2C'_1)$ ne coupe pas $(B'_1A_2B_2)$, etc...) On appelle $\mathcal{S}_\alpha$ l'adhérence de la composante connexe bornée de $\mathbb{E}^3 - \mathcal{B}$ (i.e. en termes plus intuitifs, la région de $\mathbb{E}^3$ "entourée" par $\mathcal{B}$, voir figure 2).
6- Pourquoi $\mathcal{S}_\alpha$ n'est pas un polytope ?
7- Décrire $\mathcal{S}_\alpha$ à partir de $\mathcal{P}_\alpha$, en lui "enlevant" 3 tétraèdres.

On appelle *polyèdre* de $\mathbb{E}^3$ toute partie de $\mathbb{E}^3$ qui est le domaine d'un complexe simplicial $\mathcal{C}$. On appelle *sommet* du polyèdre tout point $X \in \mathbb{E}^3$ tel que :
-X est sommet de l'un des simplexes de $\mathcal{C}$, et
-X n'appartient pas à l'intérieur de $|\mathcal{C}|$.
8- Soit Ω le milieu du segment joignant O au centre de $(A_1B_1C_1)$.
8.1- Vérifier que $\mathcal{S}_\alpha$ est l'union des 8 tétraèdres de la forme $(XYZ\Omega)$ où (XYZ) décrit les 8 triangles qui forment $\mathcal{B}$.
8.2- En déduire que $\mathcal{S}_\alpha$ est bien un polyèdre de sommets $A'_1, B'_1, C'_1, A_2, B_2, C_2$.
Remarque : Ω n'est pas un sommet de $\mathcal{S}_\alpha$.

On appelle 3-triangulation d'un polyèdre $\mathcal{Q}$ tout ensemble de tétraèdres vérifiant les conditions (i-ii-iii) déjà énoncées pour les polytopes (voir ex. 3).
9- Montrer que tout tétraèdre ayant 4 sommets dans $\{A'_1, B'_1, C'_1, A_2, B_2, C_2\}$ a une arête non-incluse dans $\mathcal{S}_\alpha$.
En déduire que $\mathcal{S}_\alpha$ n'a aucune 3-triangulation.