Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2010/2011

Modèles de Calcul : feuille 5

Ensembles décidables et semi-décidables

Le temps partagé. Les questions suivantes ne sont pas des exercices. On vous propose d'y réfléchir en pensant aux algorithmes d'une manière informelle. Plus exactement, cela veut dire que :

- Tout algorithme peut être implémenté en tant que machine du Turing (thèse de Church), mais vous n'êtes pas obligés de construire une telle machine explicitement.
- Il faut se débarasser de toute considération d'efficacité et se poser uniquement la question "est-ce possible ou non" ?

Questions :

1. Soit un algorithme A. Comment le transformer en un autre algorithme A' qui simule A et qui calcule en même temps le nombre d'opérations faites par A ?
2. Comment faire marcher un algorithme non pas sur une donnée particulière mais sur toutes ses données ?
3. Comment appliquer à une donnée tous les algorithmes ?
4. Comment faire marcher tous les algorithmes sur toutes les données ?

Terminologie. On dit qu'un algorithme A *énumère* un ensemble X si A, en travaillant sans arrêt, retourne au fur et à mesure tous les éléments de X.

Exercice 5.1

1. Soit un ensemble semi-décidable $X \subseteq \mathbb{N}$. Comment l'énumérer ?
2. Montrer que tout ensemble semi-décidable $X \subseteq \mathbb{N}$ peut être énuméré sans répétitions (c'est-à-dire, sans retourner le même élément plusieurs fois).

Exercice 5.2

1. Montrer que s'il existe un algorithme A qui énumère un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ alors X est semi-décidable.
2. Soit un langage $L \subseteq \Sigma^*$ et son complémentaire $M = \Sigma^* \setminus L$. Montrer que si L et M sont tous les deux semi-décidables alors ils sont tous les deux décidables.
3. Donner un exemple d'un ensemble semi-décidable dont le complément ne l'est pas.
   Indication : Servez-vous du problème de l'arrêt.

Exercice 5.3

1. Soit X l'ensemble des suites de 5 chiffres décimaux qui sont des facteurs de longueur 5 du développement décimal du nombre π. Cet ensemble est-il décidable ?
2. Montrer que tout ensemble fini est décidable.
3. Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui peut être énuméré en ordre croissant est décidable.
4. Montrer qu'un langage $L \subseteq \Sigma^*$ qui peut être énuméré en ordre hiérarchique croissant est décidable.
   Rappel : Pour deux mots $u, v \in \Sigma^*$ on dit que $u < v$ en ordre hiérarchique si et seulement si soit $|u| < |v|$, soit $|u| = |v|$ mais $u < v$ en ordre lexicographique.
5. Le même argument est-il applicable
   – à un ensemble de nombres rationnels qui peut être énuméré en ordre croissant ?
   – à un langage qui peut être énuméré en ordre lexicographique croissant ?
   Justifier vos réponses.
6. (Exercice difficile) Trouver un langage qui peut être énuméré en ordre lexicographique croissant et qui n'est pas décidable.
   Indication : On peut se servir de l'exercice 4.9, question 1.

Exercice 5.4

Montrer que tout ensemble semi-décidable et infini $X \subseteq \mathbb{N}$ possède un sous-ensemble décidable et infini.

Exercice 5.5

1. Soit $f(x)$ une fonction calculable *partielle* (c'est-à-dire, pas forcément partout définie). Proposer un algorithme qui énumère l'ensemble $\mathrm{Val}(f)$. (Cet ensemble s'appelle le *domaine des valeurs* de f.)
2. Montrer que tout ensemble semi-décidable et *non vide* est le domaine des valeurs d'une fonction calculable et *totale* (c'est-à-dire, partout définie).

Exercice 5.6

1. Soit f une fonction calculable partielle. Montrer que son domaine de définition $\mathrm{Dom}(f)$ est semi-décidable.
2. Montrer que tout ensemble semi-décidable est le domaine de définition d'une fonction calculable partielle.

Exercice 5.7

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction calculable et totale qui vérifie la condition $f(x) \geq x$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Val}(f)$ est décidable.
(Attention ! On ne dit pas que la fonction f soit croissante !)
La même conclusion est-elle vraie si f satisfait la condition $f(x) \leq x$?

Exercice 5.8

Soit $X \subseteq \mathbb{N}$, est soit $\varphi(n) = |X \cap \{0, 1, \ldots, n\}|$. Qu'est-ce qu'on peut dire à propos de la nature de l'ensemble X si

- la fonction φ est calculable ?
- la fonction $\varphi_2(n) = \varphi(n) \bmod 2$ est calculable ?
- la fonction $\varphi_3(n) = \varphi(n) \bmod 3$ est calculable ?
- on peut décider, pour tout n, si $\varphi(n)$ est divisible par 3 ou non ?

Exercice 5.9

1. Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ qui soit totale et *non calculable*.
2. Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale et croissante (en sens large ou non) qui ne soit pas calculable.
3. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale et décroissante en sens large est calculable.

Exercice 5.10

Une situation suivante est-elle possible ?

- Une fonction $f(n)$ est totale et non calculable.
- Quel que soit $m \geq 1$, la fonction $f_m(n) = f(n) \bmod m$ est calculable.

<u>Indication</u> : Considérer la fonction $f(n) = g(n) \cdot n!$ où $g(n)$ est totale et non calculable.

Exercice 5.11

Soit X et Y deux ensembles semi-décidables (mais pas forcément décidables). Comment fabriquer deux ensembles semi-décidables et *disjoints* X' et Y' tels que $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, et $X' \cup Y' = X \cup Y$.

Exercice 5.12

1. Montrez que pour tout ensemble semi-décidable $S \subseteq \mathbb{N}$, il existe un ensemble décidable $D \subseteq \mathbb{N}^2$ tel que
$$S = \{\, x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \,:\, (x, y) \in D \,\}\,.$$
2. Montrez que pour tout langage semi-décidable L, il existe un langage décidable K tel que
$$L = \{\, x \mid \exists y \,:\, \langle x, y \rangle \in K \,\}\,.$$

Exercice 5.13

Soit $E \in \mathbb{N}^2$ un ensemble décidable. Est-il vrai que l'ensemble

$$T = \{\, x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in \mathbb{N} \;\, (x, y) \in E \,\}$$

est toujours semi-décidable ?

<u>Indication</u> : Considérer le complément de T.

Exercice 5.14

1. Soit $X \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble décidable. Pour tout $x \in X$ on met dans Y les entiers $1, x, x^2, x^3 \ldots$. Montrer que Y soit décidable.
2. Soit $X \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble décidable. Pour tout $x \in X$ on met dans Y l'entier $y = x - t^2$ ou t^2 est le plus grand carré inférieur ou égal à x. Montrer que Y peut ne pas être décidable.
   <u>Indication</u> : Prendre un Y semi-décidable mais pas décidable, et construire un X décidable qui engendre Y.

Exercice 5.15

Donner un exemple d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ qui ne soit pas semi-décidable et tel que son complément $Y = \mathbb{N} \setminus X$ ne soit pas semi-décidable non plus.
<u>Indication</u> : Penser aux sous-ensembles des nombres pairs et impairs.

Exercice 5.16

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions calculables partielles $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, et soit $\mathcal{Z} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions vérifiant la condition suivante : "si $f(x)$ est définie alors $f(x) = 0$". Montrer que l'ensemble des programmes calculant les fonctions de $\mathcal{Z}$ n'est pas semi-décidable.
<u>Indication</u> : Considérer le complément $\mathcal{F} \setminus \mathcal{Z}$; utiliser le théorème de Rice.

Exercice 5.17

Montrer que, quelle que soit une fonction calculable $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, il existe toujours une infinité de programmes qui la calculent.
<u>Indication</u> : Utiliser le théorème de Rice.

Exercice 5.18

1. Soit F l'ensemble des facteurs de longueur 5 du développement décimal du nombre π. Montrer que F soit décidable.
2. Soit $S \subseteq \{7\}^*$ l'ensemble des facteurs du développement décimal du nombre π qui consistent des seuls chiffres 7. Montrer que S est décidable.

Exercice 5.19

(Exercice difficile) Montrer que l'ensemble des programmes qui calculent les fonctions totales $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ n'est pas semi-décidable.

Exercice 5.20

Soit $X \subseteq \mathbb{N}$ un sous-ensemble *fini* de $\mathbb{N}$ donné sous forme d'un programme P qui pour tout $x \in \mathbb{N}$ répond si $x \in X$ ou non. Le programme P est "une boîte noire" : on ne sait pas qu'est-ce qu'il se trouve à l'intérieur de P.

1. Pourriez-vous écrire un programme qui, si X n'est pas vide, retourne comme résultat $m = \min\{\, x \mid x \in X \,\}$?
2. Pourriez-vous écrire un programme qui, si X n'est pas vide, retourne comme résultat $M = \max\{\, x \mid x \in X \,\}$?

Dans tous les deux cas vous pouvez utiliser P comme un sous-programme.