Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2010/2011

# Modèles de Calcul : CC 1

Enumérations- Machines de Turing

**Exercice 1.1** [20 points]
On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n,m) = (n+m)^2 + n + m$$

1- Comme $f(0,1) = f(1,0) = 2$ alors que $(0,1) \neq (1,0)$, l'application $f$ n'est pas injective.
2- Notons $\bar{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'application qui associe à chaque couple $(n,m)$ la classe de $f(n,m)$ modulo 2. Comme $\forall x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x^2 + x = 0$, pour tout couple $(n,m)$, $\bar{f}(n,m) = 0$. Donc le nombre 1, par exemple, n'appartient pas à l'image de $f$. Par conséquent, $f$ n'est pas surjective.
On considère l'application $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$g(n,m) = (n+m)^2 + n + 3m$$

3.1 Supposons que $g(n,m) = g(p,q)$ et $s = t$.
Alors $p + q = n + m$ et $p + 3q = n + 3m$. Le système de deux équations linéaires à deux inconnues $x, y$ :

$$x + y = s, x + 3y = s'$$

a pour déterminant $2 \neq 0$, donc ce système a une solution unique dans $\mathbb{Q}$, donc $(p,q) = (n,m)$.
3.2 Supposons que $g(n,m) = g(p,q)$ et $s < t$.

$$\begin{array}{rcl}
g(n,m) - g(p,q) = & & [s + (t-s)]^2 - s^2 + (n+3m) - (p+3q) \\
= & & 2s(t-s) + (t-s)^2 + (n-p) + 3(m-q) \\
= & & 2s(t-s) + (t-s)^2 + (t-s) + 2(m-q) \\
\geq & & 2s(t-s) + (t-s)^2 - 2s \text{ car } t-s \geq 0 \text{ et } 2(m-q) \geq -2s \\
= & & 2s(t-s-1) + (t-s)^2 \\
\geq & & (t-s)^2.
\end{array}$$

3.3 Supposons que $g(p,q) = g(n,m)$.
Si $p + q = n + m$ (cas 1), par 3.1, $(n,m) = (p,q)$.

Si $p+q < n+m$ (cas 2), par 3.2, $0 = g(m,n) - g(p,q) \geq (t-s)^2 \geq 1$. Donc $0 \geq 1$, ce qui est faux. Donc l'inégalité $p+q < n+m$ est impossible.
De même, puisque $(p,q)$ et $(n,m)$ jouent le même rôle, l'inégalité $n+m < p+q$ (cas 3) est impossible.
Finalement, seul le cas 1 est possible et il assure que $(n,m) = (p,q)$. Donc $g$ est injective.
4- Comme pour $f$, on remarque que l'entier $g(n,m)$ est toujours pair. Donc $g$ n'est pas surjective (1, par exemple, n'a pas d'antécédent par $g$).
5- Comme vu à la question 4, $g(n,m)$ est toujours pair, donc $g(n,m)/2$ est toujours un entier.
6- L'application $h$ est composée de $g$ par $x \mapsto x/2$, qui sont toutes deux injectives, donc $h$ est injective.
7- Soit $u \in \mathbb{N}$. On se demande si $2u$ est de la forme $g(n,m)$ i.e. si

$$\exists n, m \in \mathbb{N}, \ \ 2u = (n+m)^2 + n + 3m.$$

Décomposons l'entier $2u$ sous la forme :

$$2u = s^2 + \delta \quad \text{avec } s, \delta \in \mathbb{N}, 0 \leq \delta \leq 2s \tag{1}$$

Remarquons que $s, \delta$ ont la même parité.
**cas 1** : $s \leq \delta$
Alors le système d' équations

$$s = n+m, \ \ \delta = n+3m$$

admet la solution

$$m = (\delta - s)/2, n = (3s - \delta)/2$$

qui est bien entière ($\delta, s$ ont la même parité) et positive (car $s \leq \delta \leq 2s$).
**cas 2** : $\delta \leq s-2$
(le cas $\delta = s-1$ est impossible à cause des parités).
Avec les mêmes entiers $s, \delta$, $2u$ est aussi décomposable sous la forme :

$$2u = (s-1)^2 + 2s - 1 + \delta \tag{2}$$

Alors le système d'équations

$$s-1 = n+m, \ \ 2s-1+\delta = n+3m$$

admet la solution

$$m = [(2s-1+\delta) - (s-1)]/2, n = [3(s-1) - (2s-1+\delta)]/2$$

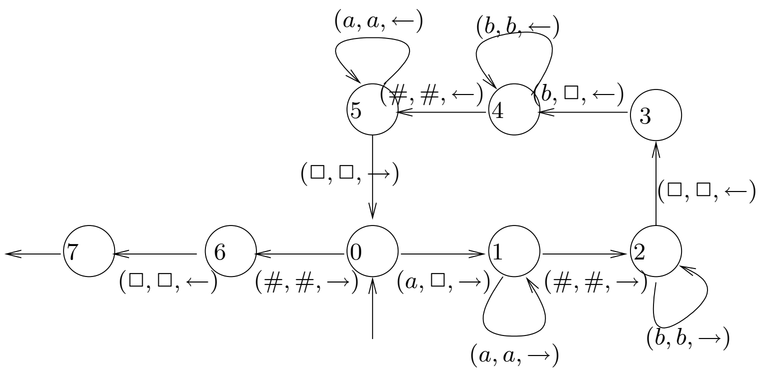
qui se simplifie en

$$m = (s + \delta)/2, n = (s - \delta - 2)/2.$$

qui est bien entière ($\delta, s$ ont la même parité) et positive (car $\delta \leq s - 2$).
Dans les deux cas on a exhibé un couple $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que

$$h(n, m) = u$$

donc $h$ est surjective.
8- Les opérations de base addition, multiplication, division par 2, sont intuitivement calculables. Comme $f(n, m), g(n, m), h(n, m)$ sont définis, à partir de $n, m$, par une suite finie de ces opérations de base, elles sont calculables.
9- On peut représenter chaque entier $n$ par une suite de $n$ symboles $a$. Avec cette représentation : l'addition est trivialement calculable par une MT. La multiplication de $n$ par $m$ s'obtient en ajoutant $n$, $m$ fois de suite, à l' entier 0.
**Exercice 1.2** [10 points]

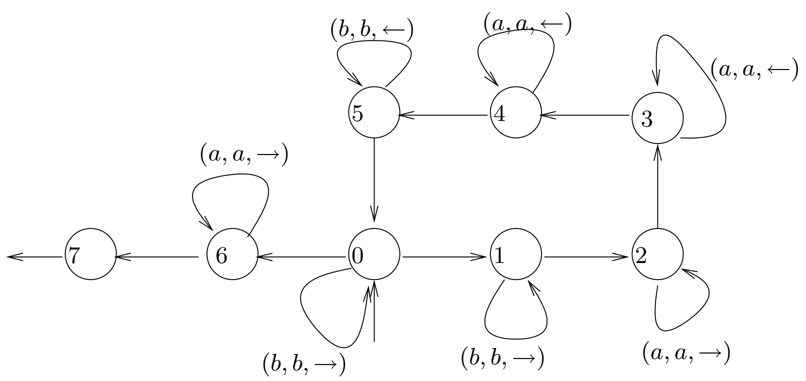



Le langage de la question 1 est reconnue par la première machine.
Principe :

```
P0- Démarrer dans l'état 0, tête de lecture positionnée
sur la lettre la plus à gauche du mot.

P1- Si la lettre le plus à gauche est un 'a':

    P1.1- Effacer ce 'a' le plus à gauche , se positionner
```




```
    sur la lettre la plus à droite (états 0,1,2,3)

    P1.2- Effacer le 'b' le plus à droite , se positionner
    sur la lettre la plus à gauche (états 3,4,5,0)

Sinon
    vérifier que le mot vaut `` #''.
```

Le langage de la question 2 est reconnu par l'union des deux machines ci-dessus. Dans la phase 1 : on ignore les 'b' à gauche du '#' et les 'a' à droite du '#'.