Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2010/2011

Modèles de Calcul : CC 3

PCP-Réductions

Exercice 3.1 [10 points]
Le PCP peut être reformulé de la façon suivante :
Donnée : Deux alphabets finis X, Y et deux homomorphismes $\varphi, \psi : X^* \to Y^*$.
Question : existe-t-il un mot $u \in X^+$ telque $\varphi(u) = \psi(u)$?
1- Montrer que, si $\varphi, \psi : X^* \to Y^*$ sont deux homomorphismes, alors le langage

$$\mathrm{L}(\varphi, \psi) := \{\varphi(u)\#\widetilde{\psi(u)} \mid u \in X^+\}$$

est un langage algébrique.
2- Le problème suivant est-il décidable ?
Donnée : Une grammaire algébrique G.
Question : existe-t-il un mot u engendré par G tel que $u = \tilde{u}$?
3- Le problème suivant est-il décidable ?
Donnée : Deux grammaires algébriques G_1, G_2.
Question : $L_{G_1} \cap L_{G_2} = \emptyset$?

Exercice 3.2 [20 points]
On étudie le problème du point fixe pour les homomorphismes (noté **PFH**) défini par :
Donnée : un alphabet fini X et un homomorphisme $\varphi : X^* \to X^*$.
Question : existe-t-il un mot $u \in X^+$ tel que $\varphi(u) = u$?
1- Supposons que $\varphi : X^* \to X^*$ est un homomorphisme tel que

$$\forall x \in X, \varphi(x) \neq \varepsilon$$

Montrer que

$$[\exists u \in X^+, \varphi(u) = u] \quad \Leftrightarrow \quad [\exists u \in X, \varphi(u) = u]$$

2- Soit $\varphi : X^* \to X^*$ un homomorphisme (quelconque). On note

$$X_\varepsilon := \{x \in X \mid \varphi(x) = \varepsilon\}; \;\; X_+ := \{x \in X \mid |\varphi(x)| \geq 1\}.$$

On définit l'homomorphisme $\pi_+ : X^* \to X_+^*$ par

$$\forall x \in X_\varepsilon, \pi_+(x) = \varepsilon, \;\; \forall x \in X_+, \pi_+(x) = x.$$

Montrer que, pour tout mot $u \in X^*$, si $\varphi(u) = u$ alors $[\varphi(\pi_+(u)) = u$ et $\pi_+(\varphi(\pi_+(u))) = \pi_+(u)]$.
3- Est-il vrai que, si $[u \in X^*$ et $\varphi(u) = u$ et $u \neq \varepsilon]$ alors $\pi_+(u) \neq \varepsilon$?
4- Montrer que, si φ a un point fixe non-vide, alors $\pi_+ \circ \varphi$ a aussi un point fixe non-vide.
5- Est-il vrai que, si $\pi_+ \circ \varphi$ a un point fixe non-vide, alors φ a un point fixe non-vide ?
6- Le problème **PFH** est-il décidable ?
7- L'instance I suivante du PCP a-t-elle une solution ?

$$I := ((a, \varepsilon), (b, abda), (c, cac), (d, \varepsilon))$$