Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2009/2010

Modèles de Calcul : CC 3

Réductions-Problème de Correspondance de Post

Exercice 3.1 [8 points]
On considère les quatres instances suivantes du Problème de Correspondance de Post :

$$\begin{aligned}
I_1 &:= ((a, ab), (cd, d), (bc, cb), (b, c)) \\
I_2 &:= ((a, ab), (cd, d), (b, c)) \\
I_3 &:= ((a, ab), (cd, d), (bc, cb)) \\
I_4 &:= ((a, ab), (bc, cb), (b, c))
\end{aligned}$$

Pour chacune de ces instances, déterminer si le PCP a une solution ou non.

Exercice 3.2 [12 points]
1- On considère un alphabet fini X. Pour tout mot $w \in X^*$, on note $\tilde{w}$ le mot miroir de w. Pour chacun des langages suivants, construire une grammaire algébrique qui l'engendre :

$$\begin{aligned}
L_e &:= \{w\#w' \mid w \in X^*, w' \in X^*, \tilde{w} = w'\} \\
L_d &:= \{w\#w' \mid w \in X^*, w' \in X^*, \tilde{w} \neq w'\}.
\end{aligned}$$

2- Soit Y un alphabet fini et soient ϕ, ψ deux homorphismes du monoide Y^* dans le monoide X^*. Montrer que le langage $IM(\varphi, \psi)$, défini ci-dessous, est algébrique :

$$IM(\varphi, \psi) := \{\varphi(u)\#\tilde{\psi(u)} \mid u \in Y^+\}.$$

3- Le problème suivant (PB de l'inclusion des langages algébriques) est-il décidable ?
Donnée : deux grammaires algébriques G_1, G_2.
Question : $\mathrm{L}(G_1) \subseteq \mathrm{L}(G_2)$?
Indication : pour une instance $I = ((u_1, v_1), \ldots, (u_i, v_i), \ldots, (u_n, v_n))$ du PCP, où les mots u_i, v_i sont écrits sur un alphabet X, on pourra considérer l'alphabet $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n\}$ et les homomorphismes $\varphi, \psi : Y^* \to X^*$ définis par $\varphi(y_i) = u_i, \psi(y_i) = v_i$.