Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2010/2011

Modèles de Calcul : CC 2

Modèles alternatifs aux machines de Turing

On rappelle qu'une machine à k compteurs est une machine qui utilise k registres $r_1, \ldots,$ r_k qui contiennent chacun un entier. Un programme pour une telle machine est une suite d'instructions numérotées de la forme :

1. n : $\mathbf{inc}(r_i); \mathbf{goto}\, m$
2. n : $\mathbf{dec}(r_i); \mathbf{goto}\, m$
3. n : $\mathbf{if}\, r_i = 0\, \mathbf{then\ goto}\, m_1 \mathbf{else\ goto}\, m_2$
4. n : **stop**

où n, m, m_1 et m_2 dénotent des numéros d'instruction. On convient également que si $\mathbf{dec}(r_i)$ est exécutée alors que r_i contient zéro, la valeur de r_i reste zéro. La configuration d'une machine à k compteurs est donnée par un tuple $(n, p_1, \ldots, p_k)$ où n est le numéro de l'instruction courante et p_i est le nombre contenu dans le registre r_i. La transition d'une configuration à une autre s'effectue en exécutant l'instruction courante et en prenant comme nouvelle instruction courante celle qui est donnée par le **goto** associé.

Exercice 2.1 [6 points]
Construire précisément une machine à 4 compteurs telle que : partant de la configuration $(0, n, m, 0, 0)$ la machine s'arrête dans la configuration :

$$(1, n, m, 0, 0) \text{ si } n \leq m, \quad (2, n, m, 0, 0) \text{ si } n > m.$$

Exercice 2.2 [4 points]
Le problème suivant (PB de l'arrêt des machines à 2 compteurs) est-il décidable ?
Donnée : une machine à deux compteurs M.
Question : le calcul de M partant de la configuration $(0, 0, 0)$ se termine-t-il ?

Exercice 2.3 [20 points]
On autorise maintenant les instructions supplémentaires suivantes :

5 n : $\mathbf{if} r_i \leq r_j \mathbf{then\ goto}\, m_1\ \mathbf{else\ goto}\, m_2$
6 n : $r_i \leftarrow r_i + r_j; \mathbf{goto}\, m$
7 n : $r_i \leftarrow r_j$ div 2; **goto** m
8 n : $r_i \leftarrow r_j$ mod 2; **goto** m

On appelle "machines 2-additives " à k compteurs les machines correspondantes. On cherche à simuler l'opération de concaténation des mots sur l'alphabet $\{1, 2\}$ par une machine 2-additive à k compteurs.

1- Construire une machine 2-additive à 2 compteurs qui calcule l'application :

$$P_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

telle que, pour tout $n \geq 1$, $P_2(n)$ est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n. Par exemple

$$P_2(3) = 2, P_2(4) = 4, P_2(5) = 4, P_2(6) = 4, P_2(7) = 4, P_2(8) = 8, P_2(9) = 8.\ldots P_2(15) = 8,$$

$P_2(16) = 16, P_2(17) = 16.$
On convient que $P_2(0) = 0$.

On définit l'application $\rho : \{1,2\}^* \to \mathbb{N}$ par : pour tout entier $\ell \geq 1$ et toute suite de symboles $x_0, \cdots, x_i, \cdots x_{\ell-1} \in \{1,2\}$

$$\rho(\varepsilon) = 0, \quad \rho(x_{\ell-1} \cdots x_i \cdots x_0) := \sum_{i=0}^{\ell-1} x_i * 2^i.$$

2- Montrer que, pour tout mot $w \in \{1,2\}^*$ et tout $x \in \{1,2\}$,

$$\rho(w \cdot x) = 2 * \rho(w) + x.$$

3- Construire précisément une machine 2-additive à 2 compteurs qui calcule l'application :

$$d : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{1,2\}$$

telle que, $d(n)$ est la lettre la plus à droite de $\rho^{-1}(n)$.
4- Construire précisément une machine 2-additive à 2 compteurs qui simule l'opération :

$$x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0 \mapsto x_n x_{n-1} \cdots x_1$$

(dans le cas où l'argument est le mot vide, le résultat sera aussi le mot vide).
5- Montrer que , pour tout mot $w \in \{1,2\}^*$,

$$2^{|\rho(w)|} - 1 \leq \rho(w) < 2^{|\rho(w)|+1} - 1.$$

6- Construire précisément une machine 2-additive à 3 compteurs qui simule l'opération :

$$(x, y_m y_{m-1} \cdots y_1 y_0) \mapsto x y_m y_{m-1} \cdots y_0$$

(on suppose que $x \in \{1,2\}$ est le contenu du registre 1 et $\rho(y_m y_{m-1} \cdots y_1 y_0)$ est le contenu du registre 2).
7- Décrire une machine 2-additive à 4 compteurs qui simule l'opération sur les mots :

$$(x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0, y_m y_{m-1} \cdots y_1 y_0) \mapsto (x_n x_{n-1} \cdots x_1, x_0 y_m y_{m-1} \cdots y_0)$$

N.B.1 : on souhaite que, partant de la configuration $(0, \rho(ux_0), \rho(v), 0, 0)$ la machine s'arrête dans la configuration $(1000, \rho(u), \rho(x_0 v), 0, 0)$.
N.B.2 : si l'argument est de la forme (ε, v) (pour $v \in \{1,2\}^*$), le résultat est (ε, v) i.e. partant de la configuration $(0, \rho(\varepsilon), \rho(v), 0, 0)$ la machine s'arrête dans la configuration $(1000, \rho(\varepsilon), \rho(v), 0, 0)$.
8- Décrire une machine 2-additive à 4 compteurs qui simule l'opération de concaténation des mots sur l'alphabet $\{1,2\}$.