Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2009/2010

Modèles de Calcul : CC 2

Modèles alternatifs aux machines de Turing

On rappelle qu'une machine à k compteurs est une machine qui utilise k registres r_1, …, r_k qui contiennent chacun un entier. Un programme pour une telle machine est une série d'instructions numérotées de la forme :

1. n : $\mathbf{inc}(r_i); \mathbf{goto}\, m$
2. n : $\mathbf{dec}(r_i); \mathbf{goto}\, m$
3. n : $\mathbf{if}\, r_i = 0\, \mathbf{then\, goto}\, m_1 \mathbf{else\, goto}\, m_2$
4. n : $\mathbf{stop}$

où n, m, m_1 et m_2 dénotent des numéros d'instruction. On convient également que si $\mathbf{dec}(r_i)$ est exécutée alors que r_i contient zéro, la valeur de r_i reste zéro. La configuration d'une machine à k compteurs est donnée par un tuple $(n, p_1, \ldots, p_k)$ où n est le numéro de l'instruction courante et p_i est le nombre contenu dans le registre r_i. La transition d'une configuration à une autre s'effectue en exécutant l'instruction courante est en prenant comme nouvelle instruction courante celle qui est donnée par le **goto** associé.

1- Le problème suivant (PB de l'arrêt des machines à 2 compteurs) est-il décidable ?
Donnée : une machine à deux compteurs M et une configuration $c := (n, p_1, p_2)$.
Question : le calcul de M partant de c se termine-t-il ?

2- Le problème suivant (PB de l'arrêt des machines à un compteur) est-il décidable ?
Donnée : une machine à un compteur M et une configuration $c := (n, p_1)$.
Question : le calcul de M partant de c se termine-t-il ?

3- On appelle machine à k compteurs booléens une machine qui utilise k registres r_1, …, r_k qui contiennent chacun un booléen (0 ou 1). Un programme pour une telle machine est une série d'instructions numérotées de la forme :

1. n : $r_i \leftarrow r_i + 1; \mathbf{goto}\, m$
2. n : $r_i \leftarrow r_i \cdot 0; \mathbf{goto}\, m$
3. n : $\mathbf{if}\, r_i = 0\, \mathbf{then\, goto}\, m_1 \mathbf{else\, goto}\, m_2$
4. n : $\mathbf{stop}$

où n, m, m_1 et m_2 dénotent des numéros d'instruction, et $+$,$\cdot$ dénotent, respectivement, la somme et le produit booléen.

Le problème suivant (PB de l'arrêt des machines à k compteurs booléens) est-il décidable. ?
Donnée : une machine à k compteurs booléens M et une configuration $c := (n, p_1, p_2, \ldots, p_k)$
Question : le calcul de M partant de c se termine-t-il ?

4- On autorise maintenant les instructions supplémentaires suivantes :

5 $n : r_i \leftarrow r_i + r_j; \textbf{goto}\, m$

6 $n : r_i \leftarrow r_i \cdot r_j; \textbf{goto}\, m$

et on appelle “super-machines” à k compteurs booléens les machines correspondantes. Le problème de l'arrêt des super-machines à k compteurs booléens est-il décidable ?

5- Soit ℓ un entier positif ou nul. Une application $f : \mathbb{B}^\ell \to \mathbb{B}$ sera dite automatique (resp. super-automatique) ssi elle peut être calculée par une machine (resp. super-machine) M à k compteurs booléens (avec $k \geq \ell$) i.e. ssi pour tous $b_1, b_2, \ldots, b_\ell \in \mathbb{B}$, lorsqu'on lance M sur la configuration $(0, b_1, b_2, \ldots, b_\ell, 0, \ldots, 0)$, son calcul se termine dans une configuration $(n, b'_1, b'_2, \ldots, b'_k)$ telle que $b'_1 = f(b_1, b_2, \ldots, b_\ell)$.
Quelles sont les applications super-automatiques de $\mathbb{B}^\ell$ dans $\mathbb{B}$?
Quelles sont les applications automatiques de $\mathbb{B}^\ell$ dans $\mathbb{B}$?