Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2010/2011

Modèles de Calcul : CC 1

Bijections-Machines de Turing

Exercice 1.1 [20 points]
On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n,m) = (n+m)^2 + n + m$$

1- L'application f est-elle injective ?
2- L'application f est-elle surjective ?
On considère l'application $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$g(n,m) = (n+m)^2 + n + 3m$$

3- On considère, dans cette question, des couples $(p,q),(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ayant même image par g ;
posons $s := p+q, t := n+m$.
3.1 Montrer que, si $s = t$ alors $(p,q) = (m,n)$.
3.2 Montrer que, si $s < t$ alors $g(m,n) - g(p,q) \geq (t-s)^2$.
3.3 L'application g est-elle injective ?
4- L'application g est-elle surjective ?
5- On considère l'application $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$h(n,m) = g(n,m)/2.$$

Expliquer pourquoi h ne prend que des valeurs entières.
6- L'application h est-elle injective ?
7 (question *difficile*)- L'application h est-elle surjective ?
8- Les applications f, g, h sont-elles calculables, en un sens intuitif ?
9- Les applications f, g, h sont-elles calculables, au sens des machines de Turing ?
- on expliquera comment les entiers $n, m, f(n,m), g(n,m), h(n,m)$ peuvent être représentés par des mots sur la bande d'une machine.
- on ne demande *pas* d'écrire une machine précise mais seulement de donner quelques arguments convaincants.

Exercice 1.2 [10 points]
1- Ecrire (précisément) une machine de Turing, à une bande, bi-infinie, qui reconnaisse le langage :

$$L := \{a^n \# b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

2- Modifier la machine de la question 1, de façon à reconnaître le langage :

$$L := \{u\#v \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u|_a = |v|_b\}$$