Université Bordeaux I
Master d'Informatique 1, 2010/2011

Modèles de Calcul : feuille 1

Bijections "calculables"

Exercice 1.1
1- Donner une bijection "calculable" φ (en un sens informel, mais incontestable), de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$. Fournir des formules explicites pour φ et φ^{-1}.
2- Exprimer par des formules explicites, les applications "conjuguées par φ" de la multiplication par -1, de l'addition, et de la multiplication : pour tous $n, m \in \mathbb{N}$

$$M(n) = \varphi(-\varphi^{-1}(n));\;\; n \oplus m = \varphi(\varphi^{-1}(n) + \varphi^{-1}(m));\;\; n \odot m = \varphi(\varphi^{-1}(n) \cdot \varphi^{-1}(m)).$$

Exercice 1.2
Donner une bijection "calculable" τ , de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Donner une formule explicite pour τ et une méthode de calcul pour τ^{-1}.

Exercice 1.3
Pouvez-vous trouver d'autres bijections "calculable" de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$?

Exercice 1.4
On propose la solution suivante à l'exercice 3 :

$$\psi(x, y) = 2^x \cdot (2y + 1).$$

Cette solution est-elle correcte ? Sinon, pouvez-vous la corriger ?

Exercice 1.5
Donner une bijection "calculable" τ' , de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$. Donner des formules explicites pour τ et τ^{-1}.

Exercice 1.6
Donner une bijection calculable de $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y \leq x\}$ dans $\mathbb{N}$. Fournir une formule explicite.

Exercice 1.7
Donner des bijections "calculables" de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Fournir des formules explicites.

Exercice 1.8
On appelle liste *finie* d' entiers une application d'un intervalle entier $[1, n](n \in \mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$. On note $\mathcal{L}$ l' ensemble de toutes les listes finies :

$$\mathcal{L} = \cup_{i=0}^{\infty} \mathbb{N}^i.$$

On note $\mathcal{L}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}$ formé des suites qui sont soit la liste vide (), soit la liste (0) soit une liste ne se terminant pas par 0.
1- Donner une bijection de $\mathcal{L}_0$ dans $\mathbb{N}$, fondée sur le fait que tout entier naturel $n \notin \{0, 1\}$ a une décomposition unique sous la forme

$$n = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdots p_k^{m_k} \cdots p_\ell^{m_\ell}$$

où p_k est le k-ième nombre premier et $m_\ell \neq 0$.
2- Donner une bijection de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 1.9

Donner une bijection de $\mathbb{N}[X]$ dans $\mathbb{N}$, puis une bijection de $\mathbb{Z}[X]$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 1.10

1- Donner une bijection de l'ensemble des arbres planaires finis non-étiquetés dans $\mathbb{N}$.
Indication : un arbre planaire fini non-étiqueté A peut être vu comme la liste (finie) de ses sous-arbres. Autrement dit
soit $A = ()$ (arbre réduit à un seul noeud)
soit $A = (A_1, A_2, \ldots, A_\ell)$ où $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ sont des arbres planaires finis et $\ell \geq 1$.
2- Donner une bijection de l'ensemble des arbres planaires finis, étiquetés par des entiers naturels, dans $\mathbb{N}$.
Indication : un arbre planaire fini, étiqueté par des entiers naturels, A peut être vu comme la liste formée de l' étiquette de sa racine suivie de la liste (finie) de ses sous-arbres. Autrement dit
$A = (r, A_1, A_2, \ldots, A_\ell)$ où $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ sont des arbres et $\ell \geq 0$.

Exercice 1.11

On considère l'ordre hiérarchique sur les mots de $\{a, b, c\}^*$: $u \leq_h v$ signifie que $|u| < |v|$ ou ($|u| = |v|$ et $u \leq_{lex} v$). Ainsi :

$$\epsilon < a < b < c < aa < ab < ac < ba < \ldots$$

On pose

$$\varphi(u) = \mathrm{Card}(\{v \in \{a, b, c\}^* \mid v < u\}).$$

Autrement dit, $\varphi(u)$ est le numéro de u selon l' ordre hiérarchique.
1- Exprimer $\varphi(ua)$ en fonction de $\varphi(u)$.
2- Donner une formule simple pour φ.