Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2010-2011

Modèles de Calcul : feuille 6

Classes P et NP

Exercice 6.1

Le problème du *mariage parfait* est le suivant :

Données Un entier n, et une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\{0,1\}$.

Question Peut-on remplacer un certain nombre de 1 par 0 dans la matrice donnée pour obtenir une matrice ayant exactement une entrée 1 par ligne et par colonne ?

1. Expliquer comment coder une donnée du mariage parfait.
2. Donner une machine de Turing non déterministe pour résoudre le problème du mariage parfait. Quelles sont les complexités en temps et en espace de cette machine de Turing ? Que peut-on en déduire sur la complexité du problème du mariage parfait ?

Exercice 6.2

Soit φ une instance de 2-SAT. On définit un graphe orienté $G(\varphi)$ par son ensemble de sommets

$$S = \{x \mid x \textit{ est une variable de } \varphi\} \cup \{\neg x \mid x \textit{ est une variable de } \varphi\}$$

et son ensemble d'arêtes

$$A = \{(\alpha, \beta) \mid (\neg\alpha \vee \beta) \textit{ ou } (\beta \vee \neg\alpha) \textit{ est une clause de } \varphi\}$$

1. Montrer que si (α, β) est une arête de $G(\varphi)$, alors $(\neg\beta, \neg\alpha)$ est aussi une arête de $G(\varphi)$. Que traduit l'existence d'un chemin de α à β dans G ?
2. Montrer que φ n'est pas satisfaisable si et seulement si il existe une variable x telle qu'il y ait un chemin de x à $\neg x$ et un chemin de $\neg x$ à x dans G.
3. En déduire que 2-SAT est dans **P**.

Exercice 6.3

Soit G un graphe non orienté, k un entier.

Le problème COUVERTURE consiste à déterminer si G admet une couverture de taille k, c'est-à-dire s'il existe un ensemble de k sommets de G tel que toute arête de G ait au moins une extrémité dans cet ensemble.

Le problème STABLE consiste à déterminer si G admet un stable de taille k, c'est-à-dire s'il existe un ensemble de k sommets de G tel que toute arête de G ait au plus une extrémité dans cet ensemble.

Démontrer que les problèmes COUVERTURE et STABLE sont NP-complets.

Exercice 6.4

Soit G un graphe, considéré suivant les cas comme orienté ou non. Démontrer que chacun des problèmes suivants se réduit polynomialement à chacun des autres :

1. G (non orienté) admet-il un cycle hamiltonien ?
2. G (non orienté) admet-il une chaîne hamiltonienne ?
3. G (orienté) admet-il un circuit hamiltonien ?
4. G (orienté) admet-il un chemin hamiltonien ?
5. Sachant que G (non orienté) est biparti, G admet-il un cycle hamiltonien ?

Exercice 6.5

On suppose que l'ensemble $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est déjà trié : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

(a) Pour le problème Somme d'entiers proposer un algorithme qui utilise un temps de calcul $O(nN)$.

(b) Il est connu que le problème Somme d'entiers est NP-complet. L'existence de l'algorithme de la question (a) entraîne-t-elle que $P = NP$?

(c) Proposer un algorithme de complexité $O(n)$ pour le problème Premier trou. Ce problème est-il P ? est-il NP-complet ?