Routage par Intervalles

Cyril Gavoille
LIP
Ecole Normale Supérieure de Lyon
69364 Lyon Cedex 07, France
`Cyril.Gavoille@lip.ens-lyon.fr`
Responsable : Pierre Fraigniaud

28 juin 1993

Résumé

Dans ce rapport, nous présentons une classification des fonctions de routage par intervalles. Nous construisons alors une hiérarchie de graphes induite par les propriétés des fonctions de routages par intervalles de ces graphes. Le but de cette étude étant de répondre à des questions du type : "quels sont les graphes qui admettent telle propriété sur la fonction de routage par intervalles ?" Cette construction est partiellement obtenue à partir de résultats connus dans la littérature, mais également à partir de résultats originaux présentés dans ce rapport. Enfin, nous étudions les cas de graphes particuliers comme la Grille, l'Hypercube, le *CCC* ou le Shuffle-Exchange.

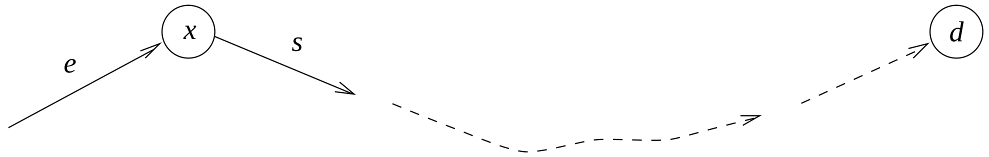
1 Introduction

1.1 Généralités sur le routage

Le routage consiste à faire transiter un message dans un réseau, d'un processeur à un autre (communication point à point), via éventuellement d'autres processeurs intermédiaires. Le choix de la *route* à suivre est déterminé par chacun des processeurs impliqués dans la communication à l'aide d'une fonction de routage. Cette fonction est décrite localement sous forme d'algorithme ou bien de table. Elle est évaluée par le processeurs lui-même, ou par un autre type de processeur annexe spécialisé appelé *routeur* (e.g. le C104). Dans la plupart cas le routeur et le processeur forment un couple indissociable appelé nœud du réseau. Généralement on modélise un réseaux de processeurs par un graphe connexe orienté symétrique $G(V,E)$, où V est l'ensemble des nœuds du réseau et E l'ensemble des liens de communication. Une fonction de routage définie sur un tel graphe est une fonction R telle que :

$$\begin{array}{rccc} R: & E\times V & \longrightarrow & E \\ & (e,d) & \longmapsto & s \end{array}$$

qui retourne, à partir d'une arête d'entrée e et d'un sommet de destination d, une arête de sortie s. Pour le sommet d'origine il n'y a pas d'arête d'entrée, et l'on pose $R(\emptyset,d)=s$, si x est l'émetteur. Toutes les fonctions de routage auxquelles on s'intéressera sont connexes, i.e. quelque soit l'émetteur x et la destination d la fonction de routage R construit un chemin de x vers d. On demande aussi à ce que le routage soit rapide, i.e. la latence du routeur soit faible, et que les chemins construits par la fonction de routage soient de longueur minimum.



1.2 Le routage par intervalles

On considère maintenant une représentation locale du routage, i.e. la fonction est définie localement en chacun des sommets.

$$R_x : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & E \\ d & \longmapsto & s \end{array} \tag{1}$$

La fonction R_x retourne l'arête de sortie s pour router, en un sommet x, le message à destination de d. L'arête d'entrée ne figure plus comme paramètre de la fonction car l'on ne s'intéresse plus à la provenance du message. En fait le chemin construit par R_x est forcément simple, i.e. sans boucle, si l'on veut une fonction de routage connexe. La fonction de routage est donc maintenant la collection des fonctions R_x pour chaque sommets x du graphe.

Les sommets sont numérotés de 1 à n, où n est le nombre de sommets du graphe. Les fonctions de routage par intervalles sont simplement des fonctions locales de routage où $R_x(d) = s$ si et seulement si la destination d est comprise dans un certain intervalle $I(x, s)$. Pour chaque sommet $x \in V$ il y a autant d'intervalles $I(x, i)$ que d'arêtes i dans l'ensemble des arcs ayant x comme extrémité initiale, i.e. le degré sortant de x.

1.3 Pourquoi le routage par intervalles ?

Comme nous l'avons déjà dit, on peut donner deux types d'implémentations possibles d'un routage : un algorithme ou bien une table de routage. Généralement les algorithmes sont utilisés lorsqu'ils sont simples à mettre en œuvre (e.g. l'hypercube, la grille,...). Il ressort également que la simplicité de tels algorithmes va de paire avec la régularité du réseau. Mais pour l'étude du routage dans le cas de réseaux plus généraux l'algorithme de routage n'est plus aussi intéressant : soit parce qu'il n'est pas connu, soit parce qu'il est trop coûteux à l'exécution (en temps ou/et en espace). Il ressort donc que les tables de routages sont utilisées pour les réseaux irréguliers où l'on cherche un routage efficace.

Notre cadre d'étude se situe ici, avec un routage par table avec a priori des réseaux (modélisés par des graphes) irréguliers.
Deux remarques renforcent l'intérêt du routage par intervalles : réduire le temps de latence du routeur et la taille mémoire qu'occupe de tels routeurs.
En effet l'idée de base est de réduire le temps de latence du routeur pour pouvoir utiliser un modèle de communication de type *wormhole*. Pour cela on cherche un algorithme très simple (implémentable au niveau hardware) avec par conséquent un temps d'exécution faible. La réduction de la quantité d'informations stockées par chaque nœud permet d'y répondre. Si n est le nombre de sommets du graphe, on peut espérer, avec un routage par intervalles, passer d'une complexité en espace de $O(n)$ à $O(d)$ pour chaque nœud, si d est le degré du graphe.
Pour le problème de la taille mémoire du routeur on peut se poser la question de stocker en chaque nœud une table de routage ou bien un algorithme ticulièr de routage. Si l'on cherche la réduction de données, il vaudra mieux choisir un algorithme de routage peut-être plus compacte qu'une table.

Mais y-a-t'il un véritable problème de place mémoire et faut-t'il impérativement réduire la taille des données ? Oui, si les réseaux sont amenés à avoir un nombre de processeurs de plus en plus grand, il est raisonnable que la taille du routeur soit constante.

Le cadre théorique du routage avec des tables compactes en $O(d)$ a été étudié par [SK85]. L'étude répond à la question du meilleur algorithme de routage avec des tables compactes permettant un routage efficace. Ainsi les routages présentés sont donc légèrement différents du routage par intervalles, cependant il est montré un algorithme donnant le routage optimum pour les graphe acycliques, et que dans le plus mauvais des cas le routage est à un facteur deux de la route optimale. Notre cadre d'étude est différent : l'algorithme de routage est fixé (c'est celui de l'appartenance d'un entier à un intervalle) et nous cherchons à définir chacun des intervalles des fonctions locales de routage pour obtenir le routage "optimal".

Notons enfin qu'il existe un routeur, le C104, construit pour ce mode de routage avec un modèle de communication de type wormhole. Son mode de fonctionnement est décrit dans [DFL93].

2 Définitions

Nous allons donner une définition plus précise du routage par intervalles. Mais tout d'abord donnons celle d'un intervalle. On note $E^+(x)$ l'ensemble des arcs sortant d'un sommet x d'un graphe orienté.

Définition 1 *Un* **intervalle** *de $\{1, ..., n\}$, noté $[a, b]$ où a et b appartiennent à $\{1, ..., n\}$ est l'ensemble des entiers i tels que :*

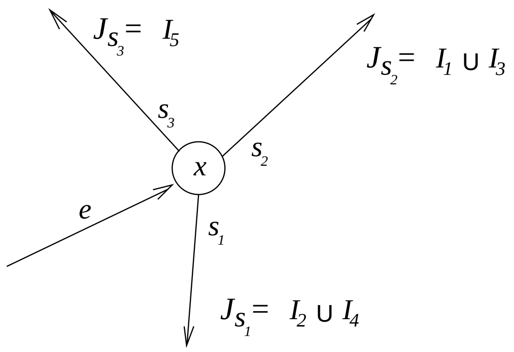
$$\begin{cases} \text{si } a \leq b, & a \leq i \leq b, & \text{on parle alors d'intervalles linéaires.} \\ \text{si } a > b, & a \leq i \leq n \text{ ou } 1 \leq i \leq b, & \text{on parle alors d'intervalles cycliques.} \end{cases}$$

On notera par ailleurs :
$[a, b[$ l'ensemble $[a, b] \setminus \{b\}$
$]a, b]$ l'ensemble $[a, b] \setminus \{a\}$
$]a, b[$ l'ensemble $[a, b] \setminus \{a, b\}$
$[a]$ l'ensemble $[a, a]$, et $\emptyset$ l'intervalle vide.

Définition 2 *Soit un graphe $G(V, E)$ connexe, orienté symétrique et $n = |V|$.*
Une **fonction de routage** *R est dite* **par intervalles** *si et seulement si c'est une fonction de routage définie comme en (1) et il existe une bijection de V vers l'ensemble $\{1, ..., n\}$ et si pour chaque sommet $x \in V$ il existe une famille I de p intervalles, $I_1, ..., I_p$ telle que :*

1. $\cup_{i=1}^{p} I_i = \{1, ..., n\}$
2. *$\forall s \in E^+(x)$, on associe un sous-ensemble $N_s \neq \emptyset$ d'indices de $\{1, ..., p\}$ tel que*
   (a) *les ensembles N_s forment une partition de $\{1, ..., p\}$*
   (b) *en notant $J_s = \cup_{i \in N_s} I_i$, alors $\forall s_1, s_2 \in E^+(x)$, $J_{s_1} \cap J_{s_2} \subseteq \{x\}$*
3. $R_x(d) = \begin{cases} s & \text{si } d \neq x \text{ et } d \in J_s \\ \emptyset & \text{si } d = x \end{cases}$

Dans cette définition les intervalles I_i, $i \in N_s$, s étant un arc de sortie de x, ne sont pas forcément disjoints deux à deux. Cependant on pourra le supposer car J_s peut toujours être décomposé en au plus $|N_s|$ intervalles disjoints.



s	N_S
s_1	{2,4}
s_2	{1,3}
s_3	{5}

On notera IRS (pour Interval Routing Scheme) la classe des graphes possèdant une fonction de routage par intervalles. Dans ce cas il faut remarquer que tout graphe G admet une fonction le routage par intervalles, i.e. $\forall G$, $G \in$ IRS (voir l'exemple figure 1). En effet il suffit de mettre sur chaque sommet et sur chaque extrémité des d'arêtes sortantes la liste des sommets du sous-arbre d'un arbre de recouvrement du graphe, sous la forme $[x_1] \cup [x_2] \cup ... \cup [x_k]$. Bien sûr une telle fonction de routage n'a plus comme avantage d'avoir une table compacte. En prenant un arbre de recouvrement des plus courts chemins on s'assure que le chemin construit par R_x ($\forall x \in V$) est simple, i.e. la fonction de routage est connexe.

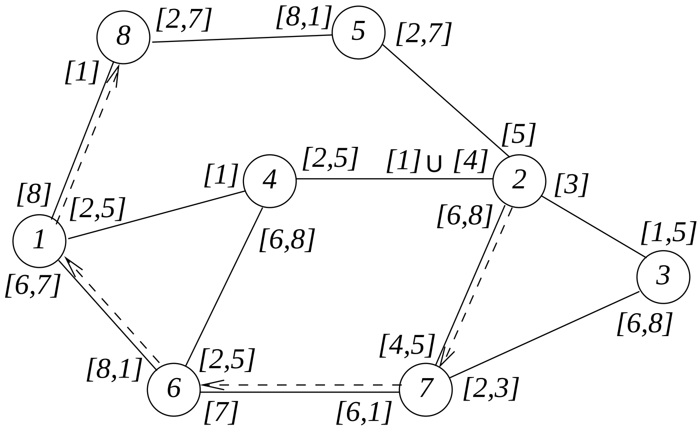


FIG. 1: Exemple d'une fonction de routage par intervalles

2.1 Définitions classiques sur les graphes

Définition 3 *Le* **diamètre** *d'un graphe G, noté $D(G)$, est la plus longue des distances de deux sommets quelconques de G.*

Définition 4 *Le* **degré** *d'un sommet x d'un graphe G, noté $deg(x)$, est le nombre de voisin de x dans G. Le degré de G, noté $\Delta(G)$, est le maximum de $deg(x)$ pour tout sommet x du graphe G.*

Définition 5 *Un* **sous-graphe** *$G'(V', E')$ de $G(V, E)$ est un graphe tel que $V' \subseteq V$ et tel que $(x, y) \in E'$ si et seulement si $(x, y) \in E$ et $(x, y) \in V' \times V'$.*

Définition 6 *Un* **graphe partiel** *$G'(V', E')$ de $G(V, E)$ est un graphe tel que $V' = V$ et $E' \subseteq E$.*

Notations : Le graphe noté P_n est le chemin à n sommets.
Le graphe C_n est l'anneau à n sommets.

Le graphe noté K_n est le graphe complet à n sommets.
Le graphe noté $K_{n,m}$ est le graphe complet bi-partie de partition à n et m sommets respectivement.

2.2 La compacité

Nous définissons maintenant une notion permettant de caractériser la taille mémoire que pourra occuper la table de routage d'une fonction de routage par intervalles, $\forall G, G \in$ IRS : la compacité. Bien sûr notre objectif sera de minimiser ce critère.

Définition 7 *La* **compacité** *d'une fonction de routage par intervalles sur un graphe $G(V,E)$ est l'entier k tel que :*

$$k = \max_{x \in V} \max_{s \in E^+(x)} |N_s|$$

Cela représente en fait le nombre maximal d'intervalles disjoints que peut posséder un sommet x sur une arête sortante s. On notera k-IRS la classe des graphes G possèdant une fonction de routage par intervalles de compacité k.

2.3 L'optimalité

Nous allons définir ce que nous entendons par *"R est une fonction de routage par intervalles optimale pour un graphe G"*. Tout d'abord rappelons que le problème de trouver une fonction de routage par intervalles pour un graphe donné se ramène, d'après la definition 2 à :

1. numéroter chacun des sommets
2. trouver pour chaque sommet une famille d'intervalles ayant certaines propriétés

Trouver une famille d'intervalles pour chaque sommet revient à affecter un ensemble d'intervalles à chacune des extrémités des arêtes. Ainsi l'on distinguera la numérotation des sommets et l'affectation des intervalles.

Maintenant on ne s'intéresse plus seulement à l'existence d'une fonction de routage par intervalles pour un graphe donné, mais encore au coût des communications points à points réalisées par la fonction de routage.

Définition 8 *On appelle* **valuation** *d'un graphe $G(V,E)$ la fonction $v : E \to \mathbb{R}$ qui donne pour chaque arc du graphe un poids. Aussi le coût d'un chemin C de G est le réel $r = \sum_{e \in C} v(e)$.*

Pour avoir des coûts de communication consistants on supposera que la valuation est strictement positive (pas de poids négatif ou nul), afin par exemple d'éviter des coûts arbitrairement faible dans le cas de graphe cyclique.

Définition 9 *On dit qu'une fonction de routage par intervalles est* **optimale** *sur un graphe $G(V,E)$:*

1. *à coûts* **unitaires** *si et seulement si pour la valuation $v(e) = 1$ ($\forall e \in V$), il existe une numérotation de sommets et une affectation des intervalles, donnant une fonction par intervalles réalisant le coût minimum, i.e. du plus court chemin, pour toutes communications. On notera IRS_1^* la classe des graphes possèdant une telle fonction de routage par intervalles.*
2. *à coûts* **constants** *si et seulement si pour toute valuation v il existe une numérotation de sommets et une affectation des intervalles, donnant une fonction par intervalles réalisant le coût minimum pour toutes communications. On notera IRS_c^* la classe des graphes possèdant une telle fonction de routage par intervalles.*

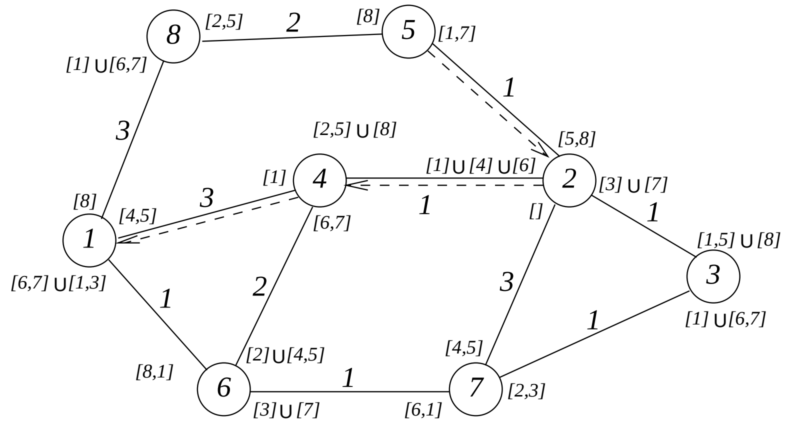


FIG. 2: Exemple d'une fonction de routage par intervalles optimale à coûts constants

3. *à coûts* **variables** *si et seulement si il existe une numérotation de sommets telle que pour toute valuation v il existe une affectation des intervalles, donnant une fonction par intervalles réalisant le coût minimum pour toutes communications. On notera* IRS_v^* *la classe des graphes possèdant une telle fonction de routage par intervalles.*

D'après cette définition il est clair que $\mathrm{IRS}_v^* \subset \mathrm{IRS}_c^* \subset \mathrm{IRS}_1^*$, et cela même pour une compacité fixée. On notera aussi k-IRS_1^*, k-IRS_c^* et k-IRS_v^* la classe des graphes possèdant une fonction de routages par intervalles optimale respectivement à coûts unitaires, constants et variables, avec de plus une compacité k. Autrement dit nous aurons toujours : $\forall k \geq 1$, k-$\mathrm{IRS}_v^* \subset k$-$\mathrm{IRS}_c^* \subset k$-$\mathrm{IRS}_1^*$ Plus loin nous verrons que l'inclusion est stricte.

3 Le routage par intervalles linéaires

Dans cette section on s'intéresse à une partie des fonctions de routages par intervalles, celle où tous les intervalles considérés sont linéaires. Il peut paraître surprenant de commencer par un cas particulier, mais cette classe de fonctions possèdent un certain nombre de propriétés [BvLT91]. De plus, comme nous le verrons plus précisément après la définition, ces fonctions de routage par intervalles linéaires sont des fonctions de routage par intervalles et par conséquent toutes les propriétés d'appartenance aux fonctions par intervalles linéaires seront valables pour l'ensemble des fonctions de routage par intervalles.

Définition 10 *Une* **fonction de routage** *est* **par intervalles linéaires** *si et seulement si c'est une fonction de routage par intervalles et si pour chaque sommet* $x \in V$*, la famille d'intervalles* I *ne comporte que des intervalles linéaires.*

On notera LIRS (pour Linear IRS) la classe des graphes qui possède une fonction de routage par intervalles linéaires. Evidemment on a LIRS $\subset$ IRS. De plus on peut toujours transformer une fonction de routage par intervalles en fonction de routage par intervalles linéaires, car par définition l'intervalle cyclique $[a,b] = [b,n] \cup [1,a]$ (union d'intervalles linéaires), si le graphe possède n sommet et si $b > a$. Bien sûr la compacité de la nouvelle fonction par intervalles linéaires peut être plus grande. Comme pour les fonctions de routage par intervalles nous noterons k-LIRS les graphes ayant une fonction de routage par intervalles linéaires de compacité k. De même on parlera des classes de graphes possèdant une fonction de routage par intervalles linéaires optimale à coûts unitaires,

constants ou variables, et de même : $\forall k \geq 1$, k-LIRS$^*_v \subset k$-LIRS$^*_c \subset k$-LIRS$^*_1$.
Avec la remarques précédente l'on a aussi : $\forall k \geq 1$, k-IRS $\subset (k+1)$-LIRS.

3.1 Caractérisation des graphes 1-LIRS

Le graphe suivant, dit en Y (voir figure 3), n'est pas 1-LIRS.
En effet si l'on considère les trois sommets x, y, z de la figure 3 avec x et y différents de 1 et 7

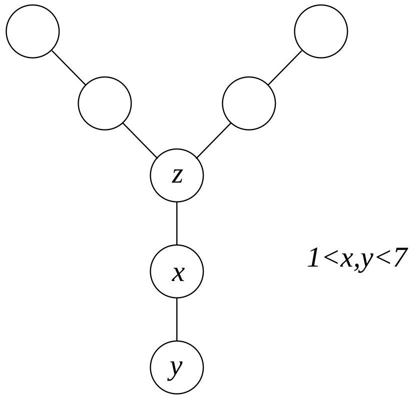


FIG. 3: Graphe en Y

(c'est toujours possible car il y a trois branches), alors l'intervalle en x sur l'arc (x, z) doit contenir les sommets 1 et 7, donc l'intervalle est $[1, 7]$. Par conséquent la destination y n'est jamais atteinte à partir du sommet x.
En fait Bakker,Tan et Leeuwen on démontré un résultat plus général qui est :

Théorème 1 (Bakker,Leeuwen,Tan) *Un arbre T est 1-LIRS si et seulement si le graphe en Y n'est pas un sous-graphe de T.*

Preuve : D'abord ils démontrent que tout arbre contenant le graphe en Y n'est pas 1-LIRS, avec la même démonstration que précédemment avec des sommets x, y, z tels que $1 \leq z \leq n$ et $1 < x, y < n$, n étant le nombre de sommets de l'arbre. Pour la réciproque ils montrent que les arbres sans graphe en Y sont les *peignes* et proposent une numérotation des sommets et une affectation des intervalles (résumées dans la figure 4).

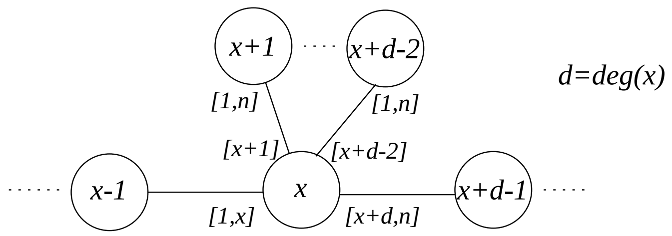


FIG. 4: Numérotation d'un arbre sans graphe en Y

Nous allons maintenant démontrer qu'une classe plus importante que les arbres sans graphe en Y, n'est pas 1-LIRS. Pour cela nous définissons plusieurs notions.

Définition 11 *Un vrai* **isthme** *d'un graphe connexe $G(V, E)$ est un arc e tel que le graphe partiel $G'(V, E \setminus \{e\})$ est composé de deux composantes connexes avec au moins deux sommets chacune.*

Définition 12 *Un graphe G est dit en* **étoile à n branches***, noté $\mathcal{E}_\backslash$, s'il possède au moins n vrais isthmes connectés à un même sous-graphe connexe de G.*

Il faut remarquer que tout graphe $\mathcal{E}_\Updownarrow$ est un graphe $\mathcal{E}_\backslash$, si $m \geq n$.

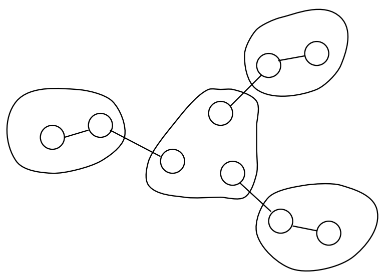


FIG. 5: Exemple d'un graphe $\mathcal{E}_\ni$

Lemme 1 *Les graphes $\mathcal{E}_\ni$ ne sont pas 1-LIRS.*

Preuve : Remarquons d'abord que si un graphe G à n sommets, connexe, possède au moins un vrai isthme e et que si G admet une fonction de routage par intervalles linéaires, alors chacun des deux sous-graphes connexes de G connectés par e possède un sommet numéroté à 1 ou à n. Sinon l'un des deux sous-graphes possèderai les sommets numérotés à 1 et à n, et alors sur l'une des extrémité de e il y aurai l'intervalle $[1, n]$. Et donc toute destination dans le même sous-graphe ne serai jamais atteinte. Cette autre destination existe bien car par définition d'un vrai isthme chaque sous-graphe doit posséder au moins deux sommets. Dans ce cas, en appliquant la remarque précédente sur les trois vrais isthmes des graphes en étoile à trois branches, les graphes $\mathcal{E}_\ni$ ne sont pas 1-LIRS, puisque l'une des branches ne possède pas le sommet 1, ni le sommet n. □

Le lemme suivant va nous servir à caractériser complètement la classe des graphes 1-LIRS.

Lemme 2 *Supposons qu'entre deux sommets L et H d'un graphe connexe, il existe deux chemins simples, i.e. sans boucle, arête-disjoints. Alors il existe deux chemins simples P_1 et P_2, arête-disjoints tels que les sommets de $V(P_1) \cap V(P_2)$ peuvent être numérotés $\{x_0 = L, x_1, ..., x_{h-1}, x_h = H\}$, $h \geq 1$, de façon à ce qu'en parcourant chacun des chemins P_1 et P_2 de L vers H, on rencontre les sommets x_i, $i = 0, ..., h$ dans l'ordre croissant de i.*

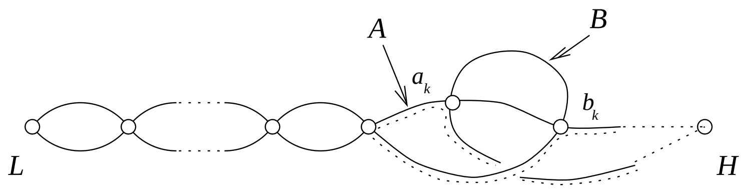


FIG. 6:

Preuve : Soit A, B deux chemins simples arêtes-disjoints entre L et H. On note par $A(x, y)$ la partie du chemin A entre les points x et y de $A \cap B$. On note $L = a_0, a_1, ..., a_h = H$ la numérotation des points d'intersections des deux chemins dans l'ordre de parcourt sur A, et $L = b_0, b_1, ..., b_h = H$ la numérotation sur B. Ainsi $A = A(L, H) = \bigcup_{i=1}^{h} A(a_{i-1}, a_i)$ et $B = B(L, H) = \bigcup_{i=1}^{h} B(b_{i-1}, b_i)$. On pose k le plus petit entier tel que $a_i = b_i$ pour $0 \leq i < k$ et $a_k \neq b_k$. Par définition on posera $k = h$ si $a_i = b_i$ $\forall i = 0...h$ (voir figure 6). Enfin soit $l(A, B) = \min(|A(a_k, H)|, |B(b_k, H)|)$ le

minimum de la longueur des chemins A et B restant entre H et le premier point d'intersection différent dans la numérotation de A et de B. On cherche donc deux chemins simples P_1 et P_2 arêtes-disjoints entre L et H, tels que $l(P_1, P_2) = 0$. Evidemment on a $0 \leq l(A, B) < |A \cup B|$. Deux cas peuvent alors se présenter :
Si $k = h$, i.e. $l(A, B) = 0$ ($a_k = b_k = H$), alors on pose $x_i = a_i$ $\forall 0 \leq i \leq h$ et c'est fini.
Si $k < h$ alors on construit les nouveaux chemins A', B' avec $A' = A'(L, H) = A(L, a_k) \cup B(a_k, H)$ et $B' = B'(L, H) = B(L, b_k) \cup A(b_k, H)$. Les chemins A' et B' sont simples et arêtes-disjoints car $A(L, a_k)$, $B(a_k, H)$, $B(L, b_k)$ et $A(b_k, H)$ le sont. On pose aussi k_a, k_b tel que $a_k = b_{k_b}$ et $b_k = a_{k_a}$. On a $k_a, k_b > k$ puisque k est le plus petit entier tel que $a_k \neq b_k$. Or $l(A', B') = \min(|A(b_k, H)|, |B(a_k, H)|) = \min(|A(a_{k_a}, H)|, |B(b_{k_b}, H)|) < \min(|A(a_k, H)|, |B(b_k, H)|)$, donc $0 \leq l(A', B') < l(A, B)$. Donc en un nombre fini d'étapes on obtient deux chemins P_1 et P_2 avec $l(P_1, P_2) = 0$, i.e. $a_i = b_i$ $\forall 0 \leq i \leq h$. $\square$

Théorème 2 *Un graphe G est 1-LIRS si et seulement si ce n'est pas un graphe $\mathcal{E}_\ni$.*

Preuve : Grâce au lemme 1 nous obtenons une condition nécessaire. Il ne reste plus qu'à démontrer la réciproque, à savoir que l'on peut trouver une fonction de routage par intervalles linéaires pour tout graphe G qui n'est pas un graphe $\mathcal{E}_\ni$.

Soit $G(V, E), n = |V|$ un graphe connexe qui n'est pas un graphe $\mathcal{E}_\ni$. Alors G se décompose en un ensemble maximal de composantes connexes $G_0, ..., G_k$ reliées par des vrais isthmes, où k est le nombre de vrais isthmes de G ($k \geq 0$, et $|V(G_i)| = 1$ est possible).
Soit $i \in \{0, ..., k\}$, G_i est relié à $G \backslash G_i$ que par au plus deux vrais isthmes. Sinon G serait un graphe $\mathcal{E}_\ni$. Donc G peut être vu comme un chemin $G_0 - G_1 - \cdots - G_k$ (à une numérotation près).

On note $L_i \in V(G_i), \forall i = 1, ..., k$ et $H_i \in V(G_i), \forall i = 0, ..., k-1$ tels que les vrais isthmes sont les arêtes $(H_i, L_{i+1}), i = 0, ..., k-1$. On pose aussi $L_0 = H_0$ et $H_k = L_k$. Montrons comment numéroter les G_i tel que $G \in$ 1-LIRS. Fixons $i_0 \in \{0, ..., k\}$ et $L = L_{i_0}$, $H = H_{i_0}$.

1. Si $L \neq H$ alors il existe deux chemins simples arêtes-disjoints (sinon il existerai un vrai isthme entre L et H, ce qui est impossible si $L \neq H$). On applique alors le lemme 2 entre L et H et on obtient la numérotation $x_0, x_1, ..., x_h$ des nouveaux chemins P_1 et P_2. Pour $1 \leq i \leq h$, on appelle C_i le chemin composé des sommets de P_1, entre x_{i-1} et x_i (x_{i-1} compris), et des sommets de P_2 entre x_{i-1} et x_i (x_i non compris).
2. Si $L = H$ on pose $C_1 = \{x_0 = L\}$, $h = 1$, le chemin réduit à un seul sommet.

On va construire une famille $\mathcal{F}$ de chemins qui formeront ensemble un arbre de recouvrement de G_{i_0}. Initialement $\mathcal{F} = \{\mathcal{C}_\infty, ..., \mathcal{C}_\langle\}$. La construction complète de $\mathcal{F}$ se fait à l'aide d'une fonction récursive $f(C, x)$ qui renvoie un ensemble de chemins à partir de la donnée d'un sommet $x \in C$, C étant un chemin de $\mathcal{F}$. Posons $V(\mathcal{F}) = \bigcup_{C_i \in \mathcal{F}} V(C_i)$, l'ensemble des sommets de tous les chemins contenus dans $\mathcal{F}$.

$\underline{f(C, x)}$

1. Si x a un successeur u dans C alors empiler u et C
2. Tant qu'il existe u voisin de x, $u \notin V(\mathcal{F})$, faire :
   (a) construire un chemin simple, i.e. sans boucle, C_{t+1}, où $t = |\mathcal{F}|$ tel que :
   si $deg(u) = 1$ alors $C_{t+1} = (x, u)$
   sinon $C_{t+1} = (x, u, u_1, ..., u_r) \backslash u_r$ avec $u_i \notin V(\mathcal{F}), i = 1, ..., r-1$, et $u_r \in V(\mathcal{F})$.
   (Un tel chemin C_{t+1} existe toujours puisque G_{i_0} n'a pas de vrai isthme. Eventuellement $u_r = x$. Notons aussi que nécessairement $u_r \in C_{t_0}$ avec $t_0 < t + 1$.)

   (b) Empiler u et C_{t+1}
   (c) $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup C_{t+1}$
3. Tant que la pile est non vide faire :
   (a) Dépiler C, puis x
   (b) Evaluer $f(C, x)$

On construit alors un arbre de recouvrement du graphe G_{i_0} en évaluant successivement $f(C_i, x_{i-1})$ pour $i = 1, ..., h$. Les chemins C_i sont crées et rajoutés à $\mathcal{F}$ dans l'ordre croissant de i. Aussi à l'initialisation $\mathcal{F}$ contient un certain nombre de chemins, dit "primaires". Il s'agit de $C_1, ..., C_h$.
Remarque : à la fin de cette étape tous les sommets de G_{i_0} sont visités (mais pas toutes les arêtes), i.e. $V(\mathcal{F}) = V(G_{i_0})$.

La numérotation des sommets de G_{i_0} s'effectue grâce à une fonction récursive $Num(C, x)$ qui numérote le sommet x et ses successeur sur le chemin $C \in \mathcal{F}$, en parcourant éventuellement d'autres chemins non primaires de $\mathcal{F} \backslash \{C_1, ...C_h\}$ si un sommet appartient à plusieurs chemins. Soit N la variable globale de numérotation contenant le numéro courant du dernier sommet numéroté jusqu'à maintenant. Nous appelons $label(x)$ le numéro affecté au sommet x.

$\underline{Num(C, x)}$

1. $label(x) \leftarrow N$
2. $N \leftarrow N + 1$
3. Soit $W_h(x)$ l'ensemble des chemins C_i contenant x et d'indice $i > h$.
   $W_h(x) = \{C_{r_1}, C_{r_2}, ..., C_{r_s}\}$ avec $h < r_1 \leq r_2 ... \leq r_s$.
   (Notons que $s \geq 1$ puisque $C_{r_1} = C$).
4. Pour $i = s$ jusqu'à 1 faire :
   Si x a un successeur u_i dans C_{r_i} alors évaluer $Num(C_{r_i}, u_i)$

Remarque : cette dernière condition est toujours vérifiée pour $i > 1$.
On numérote alors l'ensemble des sommets de G_{i_0} en initialisant $N = n_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} |V(G_i)|$, $\forall i = 1, ..., k$, et en évaluant successivement $Num(C_i, x_{i-1})$ sur tous les cycles primaires, i.e. pour $i = 1, ..., h$. On remarquera que le sommet $L = x_0$ est toujours numéroté à $n_{i_0} + 1$, qui est le plus petit numéro des sommets de G_{i_0}. En fixant les intervalles nous allons faire en sorte que les messages vers une destination de numéro "petit" soit routé vers le sommet L (pour *Low*) et le messages vers une destination de numéro "grand" vers H (pour *High*).

Construction des intervalles de G_{i_0}

Soit $fin(C) = \max_{x \in C}\{label(x)\}$ le plus grand numéro des sommets du chemin C. On remarque que le dernier sommet d'un chemin, celui qui n'a pas de successeur dans ce chemin, à un numéro supérieur à tous les autres sommets de ce chemin, car la fonction $Num(C, x)$ numérote x suivant ses successeurs dans C dans l'ordre croissant. On pose comme précédemment $W_0(x) = \{C_{r_1}, ..., C_{r_s}\}$, qui représente ici la liste des chemins contenant x comme sommet. A une numérotation près on supposera $0 < r_1 \leq r_2 ... \leq r_s$ $(s = |W_0(x)| \geq 1)$. On note $I_{x,e}$ l'intervalle (linéaire) affecté à l'arc e sortant du sommet x.

Pour tous les sommets $x \in V(G_{i_0})$ calculer $W_0(x)$ et faire :

si $deg(x) = 1$ alors on pose sur l'unique arc sortant e

$I_{x,e} = [1, n]$

sinon

soit $e_0 = (x, y_0)$ l'arc tel que y_0 est le prédécesseur de x sur C_{r_1}, s'il existe.
(En fait seul $x = x_0$ n'a pas de prédécesseur sur C_1.)
$I_{x,e_0} = [1, x[$
si $s = 1$ alors on pose l'arc $e_1 = (x, y_1)$ tel que y_1 est le successeur de x sur C, ou bien $e_1 = (x, u_r)$ si y_1 n'existe pas. u_r est donné par la fonction $f(x, C_{r_1})$.

$I_{x,e_1} =]x, n]$

sinon on pose les arcs $e_i = (x, y_i)$ si y_i est le successeur de x sur C_{r_i} $\forall i = 1...s$.
(y_i existe toujours si $s > 1$.)

$I_{x,e_1} =]fin(C_{r_2}), n]$
$I_{x,e_i} =]fin(C_{r_{i+1}}), fin(C_{r_i})]$ pour $i = 2...s-1$
$I_{x,e_s} =]x, fin(C_{r_s})]$

$I_{x,v} = \emptyset$ sur tous les autres arcs v sortant de x.

On remarquera que $fin(C_{r_i})$ est une fonction décroissante de r_i (donc de i), car la fonction $Num(C_{r_i})$ est évaluer dans l'ordre $i = s...1$. Aussi si x émet un message à une destination d, et si $d < x$, le message sera routé vers C_{r_1}, puis de proche en proche vers le chemin primaire C_1, se qui garanti que le message arrive au sommet $L = x_0$. Si $d \geq n_{i_0+1}$ il sera router vers C_{r_1} dans le sens contraire cette fois-ci, puis de proche en proche vers le chemin primaire C_h, se qui garanti que le message arrive en H. Pour les cas intermédiaires, $x < d < n_{i_0+1}$, le message est routé vers un chemin C_{r_i} suivant la valeur de $fin(C_{r_i})$.

<u>Construction des intervalles sur les vrais isthmes</u>
Il ne reste donc plus qu'à connecter les composantes $G_0, ..., G_k$ entres elles, en affectant un intervalle sur chacun des vrais isthmes.

1. $\forall i = 0...k-1$, en H_i sur l'arc (H_i, L_{i+1}) mettre l'intervalle $]n_{i+1}, n]$
2. $\forall i = 1...k$, en L_i sur l'arc (L_i, H_{i-1}) mettre l'intervalle $[1, n_i]$

□

3.2 Optimalité des fonctions de routage par intervalles linéaires

Nous donnons ici les principaux résultats de [BvLT91] sur l'optimalité des fonctions de routage par intervalles linéaires.

Théorème 3 ([BvLT91])
$G \in$1-LIRS$^*_v$ $\Leftrightarrow$ G est un Centipede.
$G \in$1-LIRS$^*_c$ $\Leftrightarrow$ G est un Centipede, un C_3-star ou un K_4 avec au plus 2 sommets étoilés.
Pour la preuve et les définitions des graphes se reporter à [BvLT91], et la figure 7.

Attention c'est un résultat général, mais il peut parfaitement exister des graphes G avec une certaine valuation telle que G ne possède pas une fonction de routage par intervalles optimale, et qui ne vérifie pas la liste du théorème 3. Par exemple $K_{2,3}$ avec coût unitaire admet un optimum alors qu'il ne vérifie pas le théorème étant donné que le même graphe avec la valuation suivante ne permet pas de construire une fonction de routage par intervalles optimale : 2 sur toutes les arêtes sauf en deux arêtes non incidentes au même sommet, où l'on met 4 et 5 [BvLT91] (voir figure 8).
Plus généralement il a été montré dans [BvLT91] que pour tout k, le graphe $K_{2,2k+1}$ appartient à

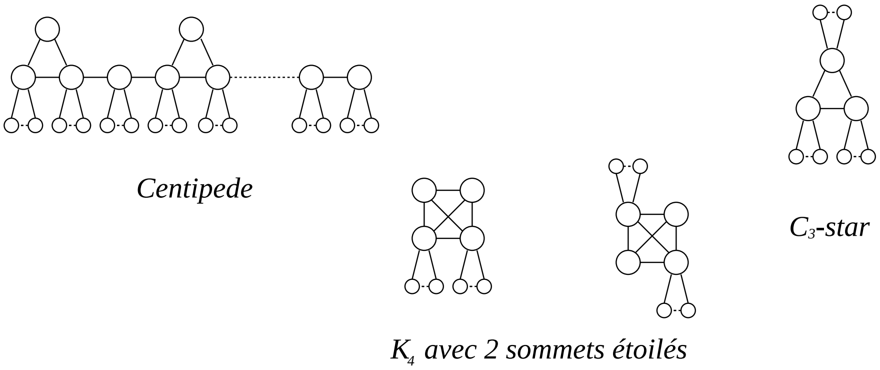


FIG. 7: Les graphes 1-LIRS$_v^*$ et 1-LIRS$_c^*$

FIG. 8: $K_{2,3}$ n'est pas 1-LIRS$_c^*$, mais 1-LIRS$_1^*$

$(k+1)$-LIRS$_v^*$, mais pas à k-LIRS$_v^*$. C'est à dire que $\forall k \geq 1$, k-LIRS$_v^* \subsetneq (k+1)$-LIRS$_v^*$.

La caractérisation de la classe des graphes 1-LIRS$_1^*$ reste un problème ouvert, cependant nous avons maintenant quelques résultats généraux sur les graphes appartenant à cette classe.

Définition 13 *S est un* **sous-graphe des plus courts chemins** *de G si et seulement si $V(S) \subseteq V(G)$ et si pour tout couple de sommets (x,y) de S, tous les sommets et toutes les arêtes des plus courts chemins de x à y dans G sont contenus dans S*

Lemme 3 ([BvLT91]) *Tout graphes possédant C_n, $n \geq 5$, comme sous-graphe des plus courts chemins n'est pas 1-LIRS$_1^*$, si $n \geq 5$.*

Preuve : Nous donnons ici seulement une idée de la preuve en montrant que $C_n \notin$ 1-LIRS$_1^*$ pour n impair et $n \geq 5$. Une autre preuve étant donnée dans le corollaire 2 du théorème 6. Soit x et y (on suppose par exemple $x < y$) les numéros des sommets voisins du sommets numéroté à n, et le sommets u tel que u soit équidistant de n et de y (voir la figure 9). C'est toujours possible si n est impair. Dans ce cas l'intervalle I sur l'arête sortante de u en direction de x doit contenir les sommets x et n, car ils sont tous les deux situés sur le plus court chemin. Or dans ce cas $I = [...x..., n]$ et $y \in I$, et donc la destination y ne peut être routée en utilisant le plus court chemin.

Corollaire 1 *Le graphe de Petersen n'est pas 1-LIRS$_1^*$*

Preuve : Car il contient C_5 comme sous-graphe des plus courts chemins. □

Théorème 4 $\forall k \geq 1$ *et* $\forall G$
$G \in k$-LIRS$_1^* \Leftrightarrow$ tous les sous-graphes des plus courts chemins G' de G sont tels que $G' \in k$-LIRS$_1^*$.
$G \in k$-IRS$_1^* \Leftrightarrow$ tous les sous-graphes des plus courts chemins G' de G sont tels que $G' \in k$-IRS$_1^*$.

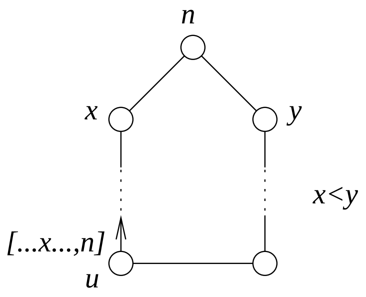


FIG. 9: $C_n \notin$ 1-LIRS$_1^*$, $\forall n \geq 5$

D'après la définition on considère qu'un graphe sans fonction de routage par intervalles, n'admet pas de fonction de routage par intervalles optimale.

Preuve : Il est évident que $G(V,E)$ est un sous-graphe des plus courts chemins de G.

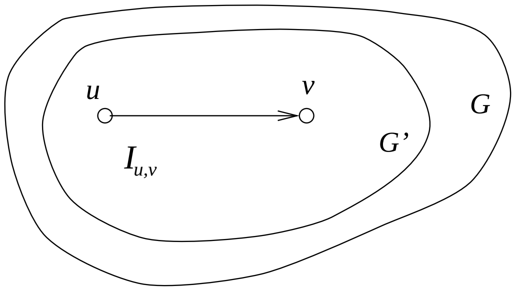


FIG. 10:

Montrons maintenant que si $G \in k$-LIRS$_1^*$ (resp. $G \in k$-IRS$_1^*$) alors quelque soit G' le sous-graphe des plus courts chemins de G alors $G' \in k$-LIRS$_1^*$ (resp. $G \in k$-IRS$_1^*$). On suppose G possédant une fonction R de routage par intervalles optimale. Ainsi tous les sommets de G sont numérotés. Démontrons la propriété pour $k=1$. Soit $I_{u,v}=[x,y]$ l'intervalle affecté au sommet u sur l'arête $(u,v) \in E'$, $u,v \in V'$, $x,y \in V$ (voir la figure 10). On pose $n=|V|, n'=|V'|$. On définit $x'=\min_{z \in V', z \geq x}\{z\}$ le plus petit numéro de sommet de G' juste plus grand où égale à x, et $y'=\max_{z \in V', z \leq y}\{z\}$ le plus grand numéro de sommet de G' juste plus petit où égale à y. x' et y' existent car V' contient au moins 2 sommets (u et v). On a alors les deux affirmations suivantes : si $[x,y]=I_{u,v}$ est un intervalle linéaire alors $[x',y']=I'_{u,v}$ est un intervalle linéaire et $\forall z \in V', z \in I_{u,v} \Rightarrow z \in I'_{u,v}$, et si $[x,y]$ est un intervalle cyclique alors $[x',y']$ est un intervalle cyclique et $\forall z \in V', z \in I_{u,v} \Rightarrow z \in I'_{u,v}$ En effet si $x \leq y$ alors $x \leq x' \leq y' \leq y \Rightarrow [x',y']$ est un intervalle linéaire. De plus par définition il n'y a pas de sommet $z \in V'$ entre x et x' d'une part, et y et y' d'autre part. De même si $x \geq y$ alors $[x,y]=[1,y] \cup [x,n] \Rightarrow 1 \leq y' \leq y \leq x \leq x' \leq n \Rightarrow [1,y'] \cup [x',n]=[x',y']$ est un intervalle cyclique. De plus par définition il n'y a pas de sommet $z \in V'$ entre x et x' d'une part, et y et y' d'autre part. Il suffit pour construire R'_u, la fonction de routage par intervalles optimale au sommet u, de numéroté chaque sommet $u \in V'$ par $u'=r(u) \in [1,n']$ qui est le rang de u dans l'ensemble V' et d'affecter sur toutes les arêtes sortantes de u' l'intervalle $I'_{u',v'}=I'_{r(u),r(v)}=[r(x'),r(y')]$. Comme r est une fonction monotone $z \in [x',y'] \Rightarrow r(z) \in [r(x'),r(y')]$. Donc R'_u, $\forall u \in V'$, garde la propriété d'optimalité. Pour démontrer le résultat avec un k quelconque on suppose sans perte de généralité que $I_{u,v}=\bigcup_{i=1}^{k}[x_i,y_i]$ avec $[x_i,y_i] \cup [x_j,y_j]=\emptyset$ $\forall i \neq j$. On effectue alors sur chacun des intervalles $[x_i,y_i]$ disjoints les mêmes transformations que précédemment pour obtenir des intervalles $[r(x'_i),r(y'_i)]$ et aussi une fonction de routage optimale (à coûts unitaires) de compacité k. $\square$

Une méthode permet cette fois-ci de construire des graphes 1-LIRS$_1^*$. Il s'agit du résultat suivant appliqué à la somme cartésienne de 2 graphes.

Définition 14 *La* **somme cartésienne** *de deux graphes G_1 et G_2, notée $G_1 \Box G_2$, est le graphe G tel que $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ et $(x, y) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in E(G)$ si et seulement si ($x_1 = y_1$ et $(x_2, y_2) \in E_2$) ou bien ($x_2 = y_2$ et $(x_1, y_1) \in E_1$)*

Théorème 5 *$\forall k \geq 1$, G_1 et $G_2 \in k$-LIRS$_1^*$ si et seulement si $G_1 \Box G_2 \in k$-LIRS$_1^*$*

Preuve : Si G_1 ou $G_2 \notin k$-LIRS$_1^*$ alors $G_1 \Box G_2 \notin k$-LIRS$_1^*$, car le graphe G_i ($i = 1$ ou 2) est un sous-graphe des plus courts chemins de $G_1 \Box G_2$ (théorème 4). En effet prenons un exemplaire G_i' de $G_i \notin k$-LIRS$_1^*$ et x, y 2 sommets de ce graphe. S'il existait un chemin plus court ne passant pas que par des sommets de G_i' alors il passerait par un sommet z d'un graphe G_j', exemplaire du graphe G_j ($j = 2 - i$). Or tout changement de dimension augmente de 1 la longueur du chemin de deux sommets d'un même exemplaire (la dimension étant 1 si le chemin est dans G_1' et 2 si le chemin est dans G_2'). Donc la longueur du chemin entre x et y en passant par z est strictement plus grande que la longueur du chemin passant totalement dans G_i'.
Montrons maintenant la condition nécessaire pour $k = 1$. Soit R_1, R_2 deux fonctions de routage par intervalles linéaires optimales à coûts unitaires sur les graphes G_1 et G_2. Soit un sommet (x, y) de $G_1 \Box G_2$ où x, y sont les numéros de sommets de G_1', G_2', exemplaires respectifs des graphes G_1 et G_2, par les fonctions R_1 et R_2. Soit $I_{(x,y),u}$ l'intervalle affecté au sommet (x, y) sur l'arête $u \in E(G_1 \Box G_2)$. On pose la fonction $f(a, b) = a + n_1(b - 1)$, avec $n_1 = |V(G_1)|$, et aussi $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. On numérote le sommet (x, y) par l'entier $f(x, y)$. Si $u \in E(G_1')$, i.e. $u = ((x, y), (x, y'))$, alors on pose $I_{(x,y),u} = f(I_{x,u})$, où $I_{x,u}$ est l'intervalle de R_1 affecté au sommet x sur l'arête u. Si $u \in E(G_2')$, i.e. $u = ((x, y), (x', y))$, alors on pose $I_{(x,y),u} = f(I_{y,u})$ où $I_{y,u}$ est l'intervalle de R_2 affecté au sommet y sur l'arête u.
La généralisation à k quelconque, basée sur la même technique, est immédiate. $\Box$

Remarque : la méthode de construction ci-dessus n'est pas valable, en générale, si $G_1, G_2 \in k$-IRS$_1^*$. En effet si G_1 contient un intervalle cyclique $[a, b]$, alors l'ensemble des sommets correspondant est $1 \leq ...b$ et $a \leq ...n_1$, si n_1 est le nombre de sommet de G_1. La construction donnera, pour un exemplaire G_1' du graphe G_1, un nouvel intervalle $[a', b']$ contenant cette fois-ci le sommet $n' = n_1 n_2$ supérieur au plus grand sommet de G_1'. Dans ce cas on ne peut garantir que les communications soit réalisées en empruntant le plus court chemin.

Les auteurs Bakker, Tan et Leeuwen ont également démontrés que les graphes de la figure 11 n'étaient pas 1-LIRS$_1^*$. (A ce sujet ils ont affirmé que le graphe composé de 2 carrés et d'un triangle acolés par la base (ayant un sommet commun aux 2 autres carrès) n'était pas 1-LIRS$_1^*$. Egalement par erreur ils généralisent que tout accollement de carrés (au moins 2) et de triangles par la base n'était pas 1-LIRS$_1^*$). Evidemment il faut rajouter dans cette liste tous les graphes $\mathcal{E}_\ni$ et tous les graphes contenant les graphes précédents comme sous-graphes de plus courts chemins, car par les théorèmes 2 et 4 tous ces graphes ne sont pas 1-LIRS$_1^*$.

Pour terminer cette section nous allons donner un résultat qui donne la "meilleur" fonction de routage par intervalles linéaires pour C_n.

Théorème 6 *Pour toute fonction R de routage par intervalles linéaires de compacité 1 sur le graphe C_n, $n > 2$, il existe une communication point à point réalisée par R en un temps $t_0 \geq n - 2$ étapes*

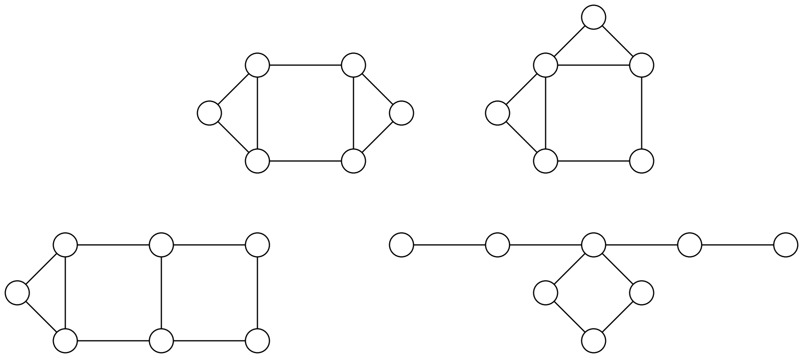


Fig. 11: Quelques graphes non 1-LIRS$_1^*$

Preuve : Si $n = 3$ alors une fonction de routage triviale donne un temps t_0 de $n - 2 = 1$ étape. Montrons par l'absurde que pour $n \geq 4$, $t_0 \geq n - 2$. Choisissons 4 sommets x, y, z, t formant un chemin c le longueur 4 sur C_n tels que :

$$\begin{cases} t \text{ soit le sommet numéroté à 1} \\ t \text{ ne soit pas le premier ou le dernier sommet du chemin } c \\ z \text{ soit le sommet du plus grand numéro des sommets du chemin } c \\ x \text{ et } y \text{ les deux autres sommets de } c \text{ distincts de } t \text{ et } z \end{cases}$$

De tels sommets x, y, z, t existent toujours dans C_n, si $n \geq 4$, et ce quelque soit la numérotation des sommets.
Cas 1 : Si $(t, z) \in E(C_n)$.
Fixons par exemple $c = (y, x, t, z)$ (voir la figure 12). L'intervalle $I_{x,t}$, qui est l'intervalle affecté au sommet x sur l'arête (x, t), doit contenir t et z. Sinon pour atteindre t ou z il faudrait un temps $t_0 \geq n - 2$, en passant par l'arête (x, y). Ce qui contredit l'hypothèse absurde $t_0 < n - 2$. De même $I_{x,t}$ ne doit pas contenir y sinon le temps de communication de x à y serait de $t_0 = n - 1$ étapes. Or $y \in [t, z] \subseteq I_{x,t}$, donc contradiction.
Cas 2 : Si $(t, z) \notin E(C_n)$.
Fixons par exemple $c = (y, t, x, z)$ (voir la figure 12). $I_{t,x}$ doit contenir x, z mais pas y, pour des raisons similaires au cas 1. Si $x < y$ alors $y \in [x, z]$ donc contradiction. Sinon, $y < x$, posons $\alpha \in V(C_n)$ tel que $(y, \alpha) \in E$, $\alpha \neq t$ (éventuellement $\alpha = z$ si $n = 4$). Si $x < \alpha$ alors $I_{t,y}$ doit contenir y et α sans x, or $x \in [y, \alpha]$ donc contradiction. Si $t < \alpha < x$ alors $I_{y,t}$ doit contenir t et x sans α, or $\alpha \in [t, x]$ donc contradiction, et le cas $\alpha < t$ est impossible car t est numéroté à 1. □

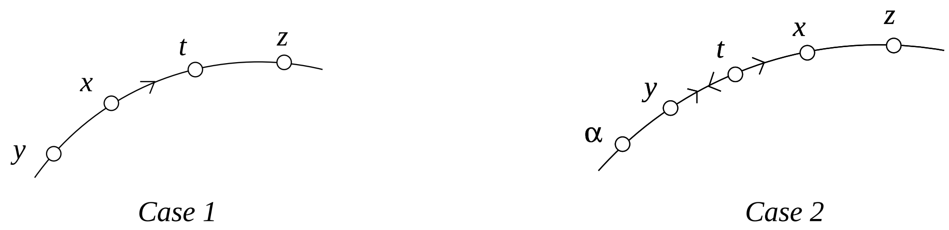


Fig. 12:

En fait on atteint la borne $t_0 = n - 2$ avec une numérotation des sommets par ordre croissant en suivant le cycle C_n.

Corollaire 2 *$\forall n \geq 5$, $C_n \notin$ 1-LIRS$_1^*$*
Preuve : $n \geq 5 \Rightarrow n-2 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = D(C_n)$
En appliquant à ce corollaire le théorème 4 on retrouve le lemme 3.

4 Le routage par intervalles : cas général

Si l'on considère maintenant des intervalles quelconques, i.e. linéaires ou cycliques, on s'aperçoit que le problème de la caractérisation des graphes 1-IRS a été résolu. En effet :
Théorème 7 ([vLT87]) *Tout graphe connexe est 1-IRS*
Preuve : L'idée de base est de faire un parcourt en profondeur d'abord dans un arbre de plus court chemin issu d'un sommet quelconque du graphe. Les sommets et les arêtes sont numérotés dans l'ordre de parcours avec un calcule modulo $n = |V(G)|$ (voir [vLT87]).

Ainsi comme $\forall k \geq 1$, k-IRS $\subset$ $(k+1)$-LIRS, on obtient par la même occasion que tout graphe est 2-LIRS, et donc 1-IRS=2-LIRS.
Voici maintenant les principaux résultats de [FJ88] sur l'optimalité des fonctions de routage par intervalles dans le cas général.
Définition 15 *Un graphe est* **planaire-externe** *si et seulement si c'est un graphe connexe où chaque composante 2-connexe est isomorphe à un anneau possédant des cordes qui ne se coupent pas.*
Une caractérisation de ces graphes est qu'un graphe est planaire-externe si et seulement si il ne contient pas comme subdivision K_4 et $K_{2,3}$ [CH67]. Une subdivision d'un graphe G étant le graphe obtenu en insérant zéro sommet ou plus le long des arêtes de G.
Définition 16 *Un graphe G est k-connexe, $k \geq 1$, si et seulement si la destruction de $k-1$ arêtes quelconques ne déconnectent pas le graphe.*
Théorème 8 ([FJ88])
$G \in$1-IRS$_v^*$ $\Leftrightarrow$ G est un graphe planaire-externe.
$G \in$1-IRS$_c^*$ $\Leftrightarrow$ chaque composantes 2-connexes de G est soit un graphe planaire-externe soit K_4.
Se reporter à [FJ88] pour les preuves.

Théorème 9 *Si $\forall k \geq 1$, G_1 et $G_2 \in k$-IRS$_1^*$ alors $G_1 \square G_2 \in (k+1)$-LIRS$_1^*$.*
Preuve : $G_1, G_2 \in k$-IRS$_1^* \Rightarrow G_1, G_2 \in (k+1)$-LIRS$_1^*$. Par application du théorème 5 on a donc $G_1 \square G_2 \in (k+1)$-LIRS$_1^*$. □
Malheureusement je pensait que la réciproque était correcte en affirmant :
Si G_i ($i = 1$ ou 2) n'est pas k-IRS$_1^*$ alors $G_1 \square G_2 \notin k$-IRS$_1^*$, car G_i est un sous-graphe des plus courts chemins de $G_1 \square G_2$ (théorème 4), et donc $G_1 \square G_2 \notin k$-LIRS$_1^*$ et donc $G_1 \square G_2 \notin (k+1)$-LIRS$_1^*$ (c'est faux ! bien évidemment).

Dans la pratique on décomposera tout intervalle cyclique en 2 intervalles linéaires : $[a,b] = [1,b] \cup [a,n]$. La construction d'une fonction de routage par intervalles linéaires est donnée par le théorème 5.

Notons que la compacité d'un graphe $G(V,E)$ quelconque possèdant une fonction de routage par intervalles optimale à coûts unitaire admet une borne $k_0 = n-1$, $n = |V|$ ([vLT87]). Nous améliorons cette borne à $k_0 \leqslant \frac{n}{2}$ grâce au résultat ci-dessous :

Proposition 1 *$\forall G$, $G \in \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-LIRS$^*_1$ et $G \in \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$-IRS$^*_1$*

Preuve : Soit un $G(V,E)$ un graphe connexe, x_0 un sommet de V et $n = |V|$. On pose V' l'ensemble des sommets numérotés du sous-arbre de racine x_0, y étant un fils quelconque de x_0 dans un arbre de recouvrement de plus courts chemins issu de x_0 ($x_0 \notin V'$). Les intervalles affectés en x_0 en direction de ce sous-arbre doivent donc, par leur union, couvrir tous les éléments de V' pour construire le plus court chemin. Nécessairement $|V'| \leq n-1$. On pose aussi E' et $E'' \subseteq V' \times V'$ deux ensembles d'arêtes tels que $(x,y) \in E' \Leftrightarrow |x-y| = 1$ et $(x,y) \in E'' \Leftrightarrow (x,y) \in E'$ ou $x \equiv y \bmod n-1$. On appelle $G'(V',E')$ et $G''(V',E'')$ les graphes non connexes ainsi obtenus. On cherche les nombre k' (resp. k'') d'intervalles linéaires (resp. cycliques) minimum pour couvrir tous les sommets de V'. D'après la définition de E' et de E'', k' et k'' sont respectivement le nombre de composantes connexes des graphes G' et G''. Une composante connexe de G' étant exactement un intervalles linéaires, resp. une composante de G'' est un intervalles, qui couvrent les sommets de cette composante. On appelle t' et t'' "le nombre de trous" des graphes G' et G'', i.e. le nombre minimal d'arêtes à rajouter à E' et E'' pour que les graphes soient connexes. On a alors les deux relation $k' + t' \leq n-1$ et $k'' + t'' \leq n-2$ (par récurrence sur n).
$t' = k' - 1$ donc $k' \leq \frac{n}{2}$, donc $G \in \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-LIRS$^*_1$
$t'' = k'' - 1$ donc $k'' \leq \frac{n-1}{2}$, donc $G \in \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$-IRS$^*_1$. □

Corollaire 3 *Tout graphe ayant moins de 5 sommets est 1-IRS$^*_1$*

5 Application aux graphes classiques

Dans cette section nous allons appliquer les résultats des théorèmes précédant à certains graphes usuels.

5.1 La grille à n dimensions : $G_n = P_{d_1} \square \cdots \square P_{d_n}$

Corollaire 4 *$\forall n$, $G_n \in$ 1-LIRS$^*_1$*

Preuve : C'est l'application du théorème 5 sur les graphes $P_{d_i} \in$ 1-LIRS$^*_1$, pour $i = 1, ..., n$. □
On construit plus précisément une fonction de routage par intervalles linéaires de la manière suivante : soit $(d_1, ..., d_n)$ la taille de chacune des n dimensions. Le nombre total de processeurs est donc $N = \prod_{i=1}^{n} d_i$. Chaque sommet x est représenté par un entier de $[0, N[$, qui peut aussi être noté par un n-uplet $(x_1, ..., x_n)$, où $0 \leq x_i < d_i$. Chaque sommet x possède exactement $2n - (z+m)$ arêtes, où z (resp. m) est le nombre de composantes nulles (resp. maximales) dans l'écriture en n-uplet de x. Dans le cas général $(z+m=0)$, x a deux intervalles notés $down_i(x)$ et $up_i(x)$ pour chaque dimension $i \in [1,n]$. Posons $Z_i(x) = (0, ..., 0, x_{i+1}, ..., x_n)$ et $M_i(x) = (d_1, ..., d_i, x_{i+1}, ..., x_n)$, avec de plus $Z_0 = M_0 = x$. Alors il suffit de poser $down_i(x) = [Z_i(x), Z_{i-1}[$ et $up_i(x) =]M_{i-1}(x), M_i(x)]$, voir la figure 13. Si $x_i = 0$ (resp. $x_i = d_i$) alors il est immédiat que $down_i(x) = \emptyset$ (resp. $up_i(x) = \emptyset$).

5.2 L'hypercube généralisé : H_n^d

Ce graphe est une généralisation de l'hypercube binaire. Ces sommets sont les mots de longueur n sur un alphabet de d lettres. Il existe une arête entre les sommets x et y si et seulement si les mots x et y diffèrent d'une lettre exactement.

Corollaire 5 *$\forall n \forall d$, $H_n^d \in$ 1-LIRS$^*_1$*

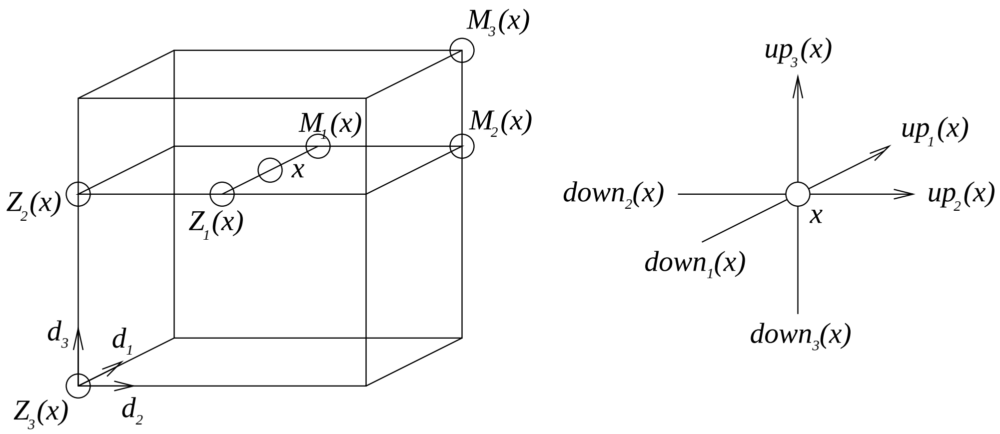


FIG. 13: Grille G_3 avec les intervalles du sommet x

Preuve : On remarque tout d'abord que $H_1^d = K_d$. En effet tout sommet d'une seule lettre est connecté aux $d-1$ autres mots d'une lettre. De plus $H_n^d = H_{n-1}^d \square K_d = \square_{i=1}^n K_d$. On a alors le résultat par application du théorème 5 sur les graphes $K_d \in$ 1-LIRS$_1^*$, pour $i = 1, ..., n$. $\square$

Corollaire 6 *L'hypercube de dimension n, noté H_n, est 1-LIRS$_1^*$*

Preuve : $H_n = H_n^2$. $\square$

5.3 Le tore à n dimensions : $T_n = C_{d_1} \square \cdots \square C_{d_n}$

Théorème 10 *$\forall n$, $T_n \notin$ 1-LIRS$_1^*$ si et seulement si il existe une dimension i, telle que $d_i \geq 5$.*

Preuve : S'il existe $d_i \geq 5$ alors T_n possède un cycle C_{d_i} à d_i sommets comme sous-graphe des plus courts chemins (théorème 4). Sinon C_{d_i} est 1-LIRS$_1^*$ $\forall i$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 5. $\square$

Théorème 11 *$\forall d_i, i = 1...n$, $T_n \in$ 2-LIRS$_1^*$*

Preuve : On applique la remarque du théorème 9 consistant à décomposer les intervalles cycliques en deux intervalles linéaires (la fonction de routage par intervalles cycliques de C_{d_i} étant triviale, pour d_i quelconque). $\square$

Problème ouvert : $T_2 = C_5 \square C_5 \notin$ 1-IRS$_1^*$?

5.4 Le cube connecté en cycle de dimension n : CCC_n

Théorème 12 *$\forall n \geq 2$, $CCC_n \notin$1-LIRS$_1^*$*

Preuve : Car ces graphes contiennent toujours un cycles de longueur 8 (et donc supérieure à 4, voir la figure 14) comme graphe de plus court chemin. Ce cycle est obtenu en prenant les 4 arêtes du cubes (formant dans H_n un cycle des plus courts chemins), puis en prenant une arêtes des cycles de chaque sommets du cube reliant deux arêtes du type précédentes, soit un total de 8 arêtes. $\square$
Ainsi tous les graphes de Calay [Hey91] ne sont pas 1-LIRS$_1^*$.

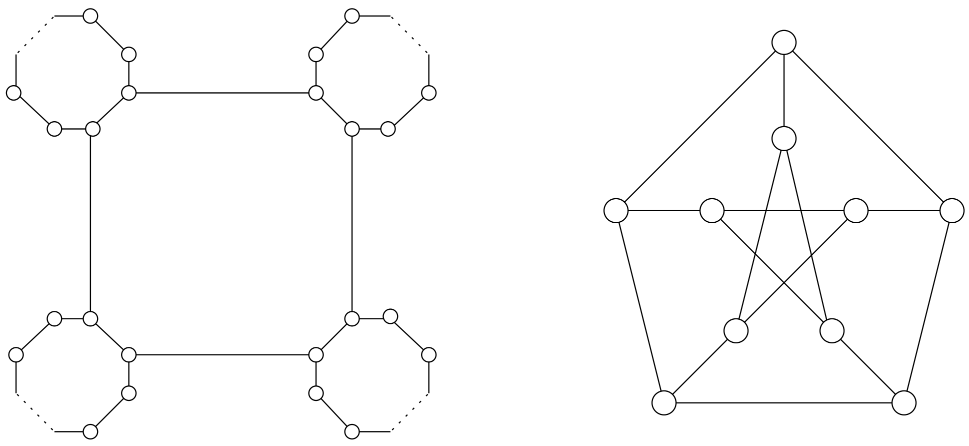


FIG. 14: CCC_n contient C_8 comme sous-graphe des plus courts chemins, $\forall n \geq 2$

5.5 Le Shuffle-Exchange : SE_n

Théorème 13 *$\forall n \geq 3$, $SE_n \notin$ 1-LIRS$_1^*$*

Preuve : SE_3 contient un sous-graphe des plus courts chemins qui n'est pas 1-LIRS$_1^*$, de même SE_4 qui contient un cycles de longueur 8 (voir la figure 15 en trait pleins). Si $n > 4$ alors SE_n possède un cycle C de longueur 5 comme sous-graphe des plus courts chemins. Par exemple $C = \{01x10, 01x11, 1x110, x1101, x1100\}$, avec $x = 1^m$ et $m \geq 1$ (x est en fait tel que l'équation en notation binaire $1x = x1$ ait une solution, voir figure 15). Pour le montrer il suffit de vérifier que le troisième sommet v_i (tous sommet est de degré 3 au maximum) d'un sommet $c_i \in C$ n'est pas un voisin d'un sommet de C situé à une distance ≤ 2.
$c_1 = 01x10$ possèdent $\{c_2, c_5\}$ et $v_1 = 001x1 \notin C$ comme voisins, et $\{(v_1, c_3), (v_1, c_4)\} \not\subset E$.
$c_2 = 01x11$ possèdent $\{c_1, c_3\}$ et $v_2 = 101x1 \notin C$ comme voisins, et $\{(v_2, c_4), (v_2, c_5)\} \not\subset E$.
$c_3 = 1x110$ possèdent $\{c_2, c_4\}$ et $v_3 = 1x111 \notin C$ comme voisins, et $\{(v_3, c_5), (v_3, c_1)\} \not\subset E$.
$c_4 = x1101$ possèdent $\{c_3, c_5\}$ et $v_4 = x1011 \notin C$ comme voisins, et $\{(v_4, c_1), (v_4, c_1)\} \not\subset E$.
$c_5 = x1100$ possèdent $\{c_4, c_1\}$ et $v_5 = x1001 \notin C$ comme voisins, et $\{(v_5, c_2), (v_5, c_3)\} \not\subset E$. $\square$

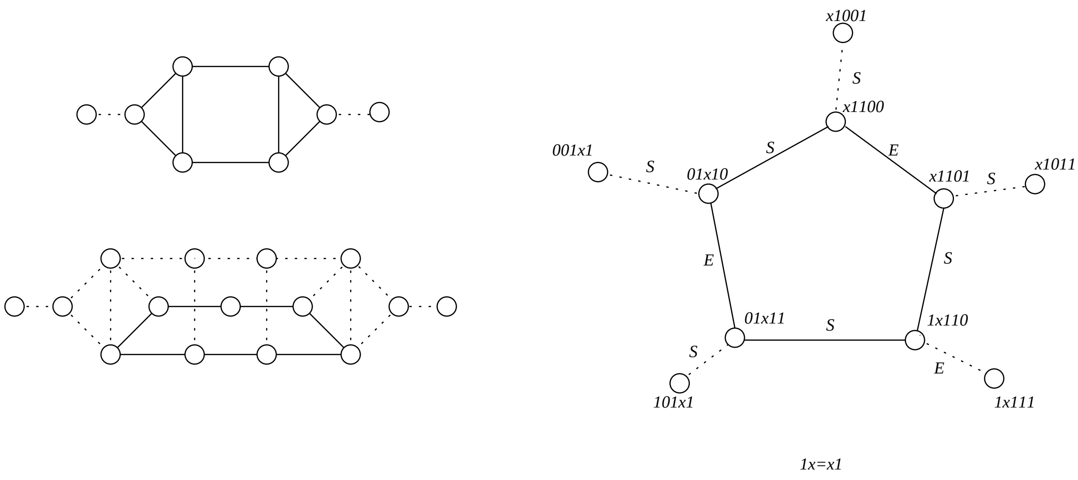


FIG. 15: $\forall n \geq 3$, SE_n contient des sous-graphes de plus courts chemins qui ne sont pas 1-LIRS$_1^*$.

6 Conclusion

Nous avons représenté dans les figures 16 et 17 la hiérarchie des classes de graphes possédant une fonction de routage par intervalles linéaires et cycliques de compacité 1. La figure 16 fait apparaître clairement la hiérarchie des graphes possédant une fonction de routage par intervalles linéaires. Deux caractérisations étaient déjà connues grâce à Bakker, Leeuwen et Tan : celle des graphes 1-LIRS$_c^*$ et 1-LIRS$_v^*$. On peut constater le résultat original de cette étude qui est l'établissement de la frontière entre les graphes 1-LIRS et les graphes quelconques. Le problème de la classe des graphes 1-LIRS$_1^*$ reste toujours ouvert, mais la frontière devient de plus en plus nette grâce aux nombreux résultats démontrés dans ce rapport.
Dans la classe des graphes possédant une fonction d'intervalles quelconques (linéaires ou cycliques) Frederickson et Janardan ont caractérisé les classes de graphes 1-IRS$_c^*$ et 1-IRS$_v^*$ (figure 17). La classe 1-IRS$_1^*$ reste également un problème ouvert, cependant la plupart des outils originaux développés dans ce rapport permettent de classer de nombreux graphes, en s'appuyant notamment sur les résultats démontrés pour la classe LIRS.

7 Perspectives

Définissons deux paramètres nouveaux pour mieux caractériser les fonctions de routages par intervalles. Il s'agit de $Time(G, R)$ et de $Space(G, R)$ tels que :
$Time(G, R)$: le coût du plus long chemin entre deux sommets de G produit par le routage de la fonction R de routage par intervalles linéaires de compacité 1. $G \in$ 1-LIRS.
$Time(G) = \min_R Time(G, R)$.
$Space(G, R)$: le nombre maximum d'intervalles sur un arc pour un graphe G et une fonction R donnés de routage par intervalles.
$Space(G) = \min_R Space(G, R)$: c'est le plus petit k tel que $G \in k$-IRS$_1^*$, ou tel que $G \in k$-LIRS$_1^*$.

On s'aperçoit alors que de nombreuses questions ouvertes, et de nombreux résultats, s'énoncent simplement avec ces deux notions.

Le théorème 6 s'ennonce alors en $\forall n > 2, Time(C_n) = n - 2$.
On peut aussi se poser la question de savoir : $\exists ? k_0$ tel que $\forall G, Space(G) \leq k_0$.
On peut aussi ennoncer la conjecture suivante : $\forall G$, $Time(G) < 2D(G)$.

Ainsi lorsque les critères d'une architecture seront d'avoir un routage avec toujours les plus courts chemins on s'efforcera de minimiser la fonction $Time(G, R)$. Lorsque le critère sera d'avoir des tables compactes (pour un routage hardware avec des contraintes mémoire sur des réseaux importants par exemple) on minimisera la fonction $Space(G, R)$.
Pour des problèmes de congestions et dans une optique de communication non plus points à points, mais généralisée on peut introduire une fonction $Cong(G, R)$ que est le nombre maximum d'éléments sur une arête, étant donnée un graphe G et une fonction de routage par intervalles R. Dans ce cas il serait utile d'étudier la minimisation de $Cong(G, R)$.

Table des matières

Références

[BP89] Jean-Claude Bermond and C. Peyrat. de Bruijn and Kautz networks : a competitor for the hypercube ? *Hypercube and Distributed Computers*, pages 279–293, 1989.

[BvLT91] Erwin M. Bakker, Jan van Leeuwen, and Richard B. Tan. Linear interval routing. *Algorithms Review*, 2 :45–61, 1991.

[CH67] G. Chartrand and F. Harary. Planar permutation graphs. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, B3 :433–438, 1967.

[DFL93] Frédéric Desprez, Eric Fleury, and Michel Loi. T9000 et C104 : La nouvelle génération de transputers. Research Report 93-01, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, 69364 Lyon Cedex 07, France, February 1993.

[FJ88] Greg N. Frederickson and Ravi Janardan. Designing networks with compact routing tables. *Algorithmica*, 3 :171–190, 1988.

[Hey91] Marie-Claude Heydemann. Réseaux modélisés par des graphes de Cayley, 1991. notes de cours de DEA d'informatique 1991-1992.

[SK85] Nicola Santoro and Ramez Khatib. Labelling and implicit routing in networks. *The Computer Journal*, 28(1) :5–8, 1985.

[VDC+93] Johan Vounckx, G. Deconinck, R. Cuyvers, R. Lauwereins, and J. A. Peperstraete. A survey of compact routing techniques. Manuscript, 1993.

[vLT87] Jan van Leeuwen and Richard B. Tan. Interval routing. *The Computer Journal*, 30(4) :298–307, 1987.

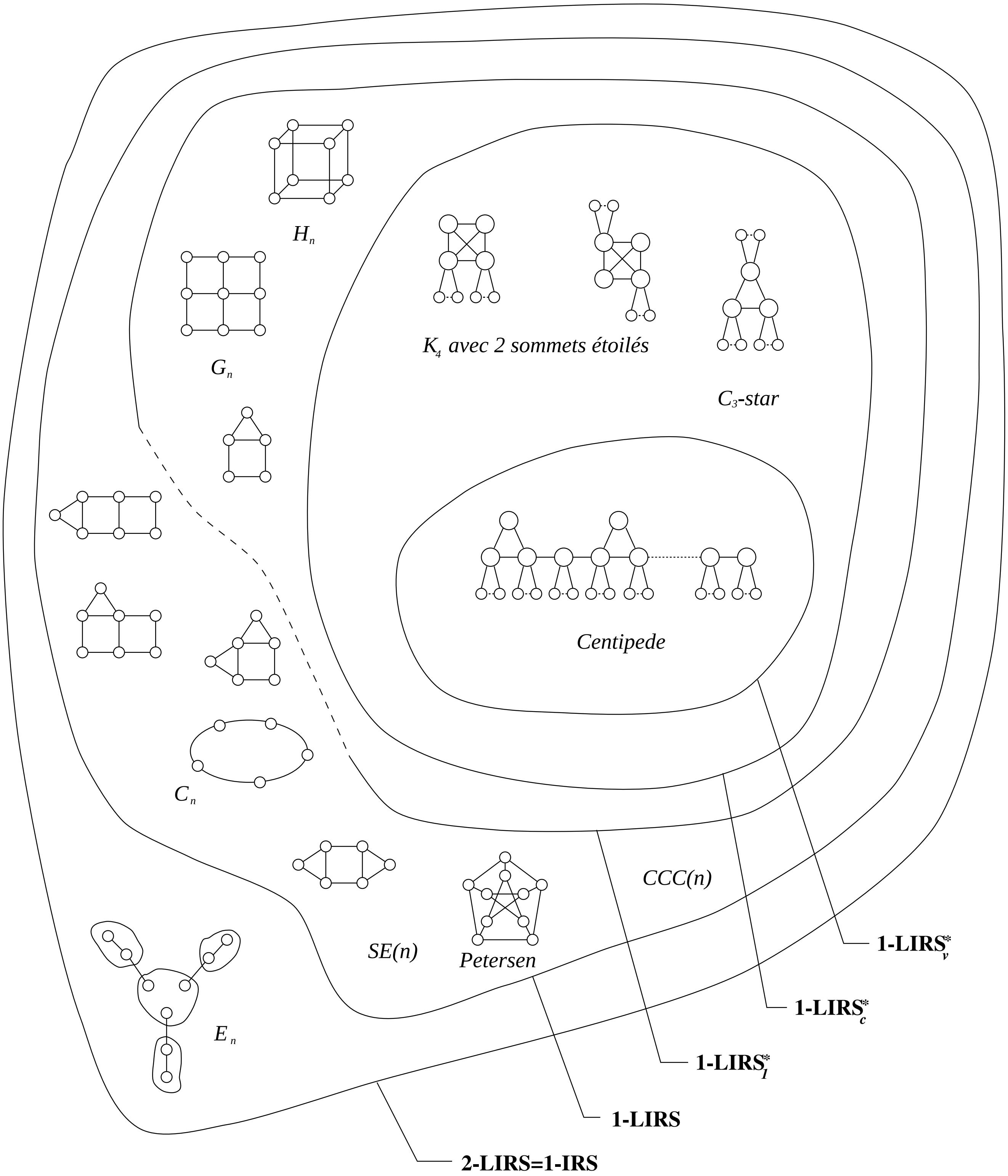
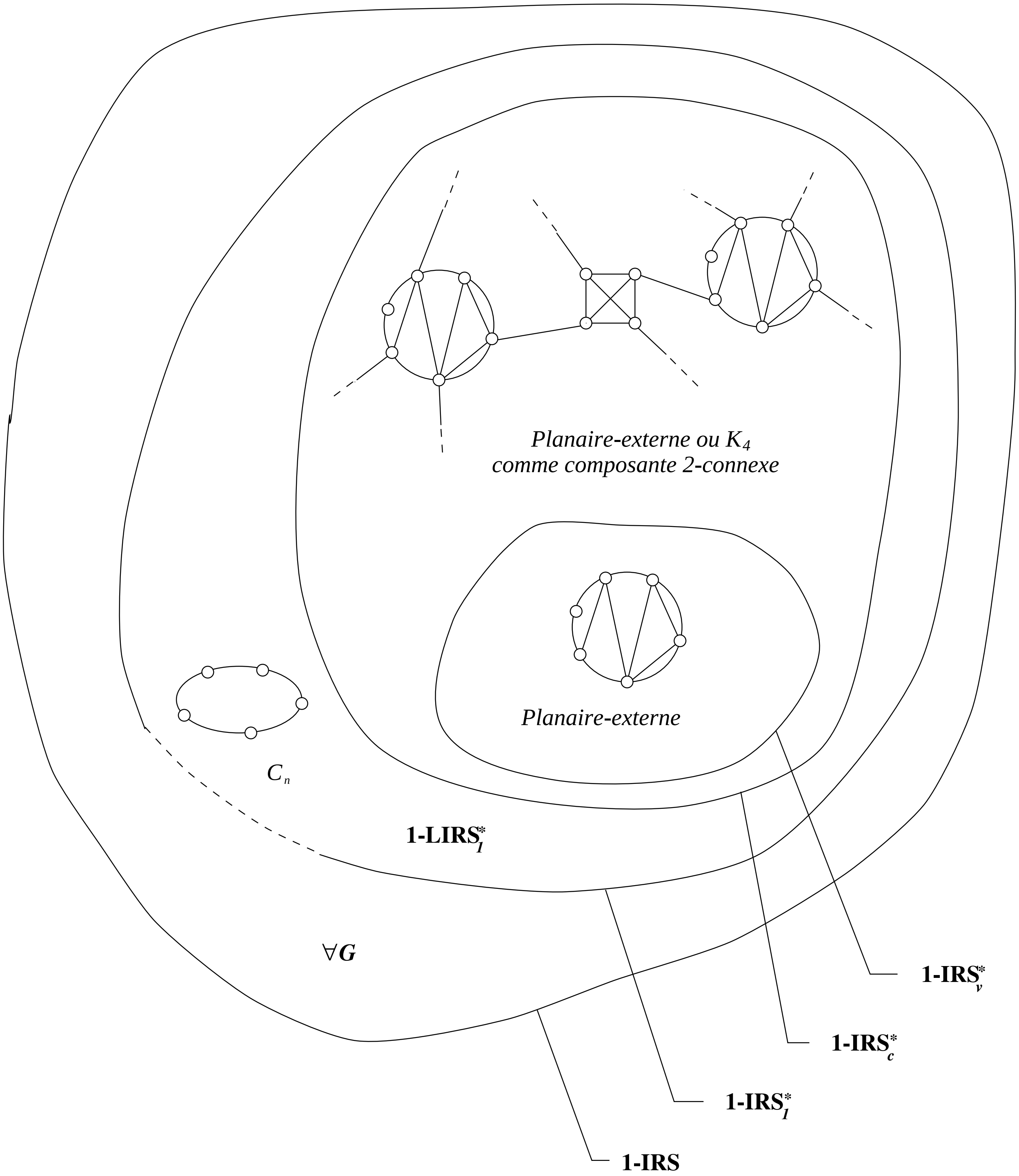

H_n
G_n
K_4 avec 2 sommets étoilés
C_3-star
Centipede
C_n
$CCC(n)$
$SE(n)$
Petersen
E_n
1-LIRS$_v^*$
1-LIRS$_c^*$
1-LIRS$_l^*$
1-LIRS
2-LIRS=1-IRS

FIG. 16:



Planaire-externe ou K_4
comme composante 2-connexe
Planaire-externe
C_n
1-LIRS$^*_1$
$\forall G$
1-IRS$^*_v$
1-IRS$^*_c$
1-IRS$^*_1$
1-IRS

Fig. 17: