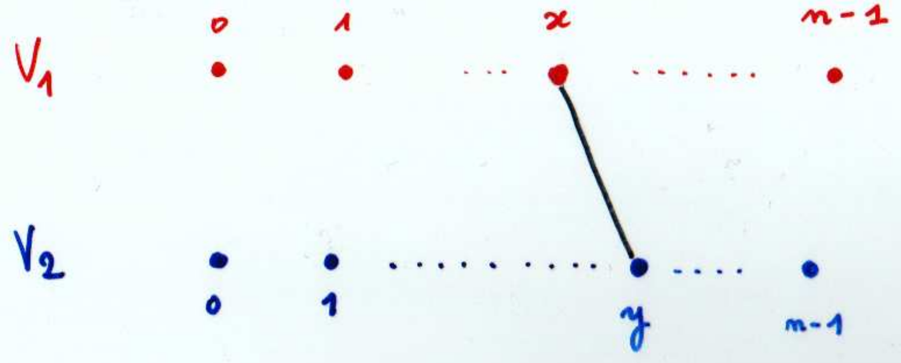
Un algorithme de reconnaissance du KNÖDEL graphe

J. Cohen
(LRI)

P. Fraigniaud
(LRi)

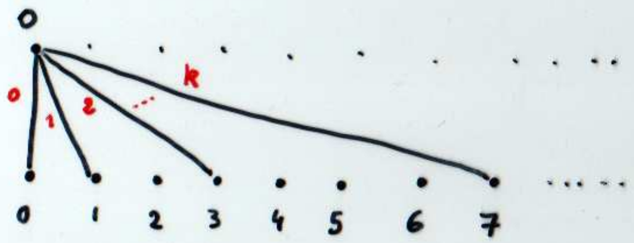
C. Gavoille
(LaBRi)

J. Cohen
(LRi)


V_1
0
1
x
$n-1$
V_2
0
1
y
$n-1$

x connecté à y

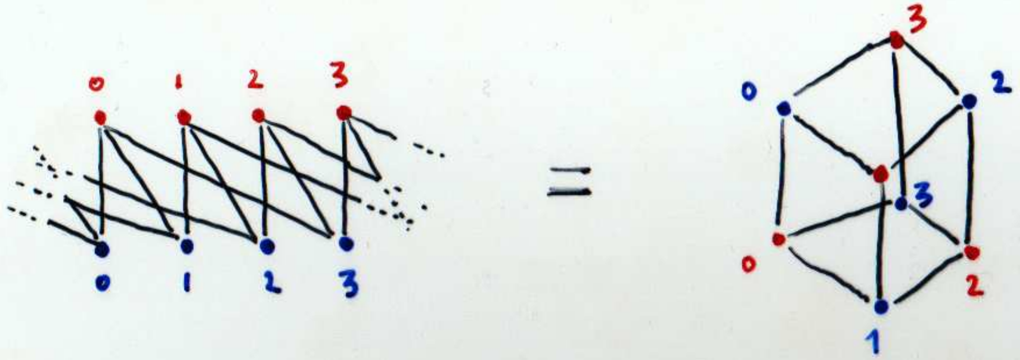
$$\Leftrightarrow \exists i \begin{cases} y \equiv x + 2^{i} - 1 \pmod{n} \\ 2^{\boxed{i}} - 1 \leqslant n-1 \end{cases}$$


0
0
1
2
...
k
0
1
2
3
4
5
6
7

dimensions: 0, 1, ..., k

- Gaphe de Cayley
- Sommets transitifs
- degrés $O(\log n)$

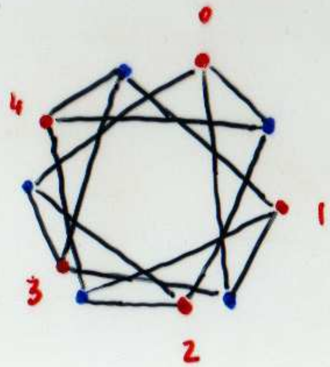
Examples :


0
1
2
3
0
1
2
3
=
3
0
2
3
0
2
1

$n = 4$
$N = 2n = 8$

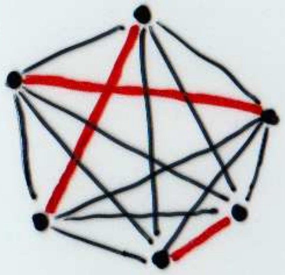
- Si $2n = 2^k$ alors même nombre de sommets et d'arêts que l'Hypercube, mais diamètre $\sim \frac{k}{2}$

$n = 5$
$N = 10$



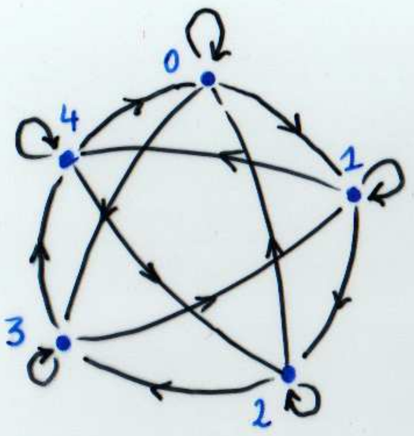
KNÖDEL 1975 Optimal gossiping en temps $\lceil \log_2 N \rceil$
dans $K_N = K_{2n}$

full duplex



$N = 6$ (pair)

Graphe biparti-incident d'un circulant (orienté)



cordes: 0, 1, 3

$n = 5$

$V = \{0, 1, 2 \dots n-1\}$

circulant $(\gamma_0, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_k)$ $\quad 0 \leq \gamma_i \leq n-1$

$(x,y) \in A \Leftrightarrow y \equiv x + \gamma_i \pmod{n}$

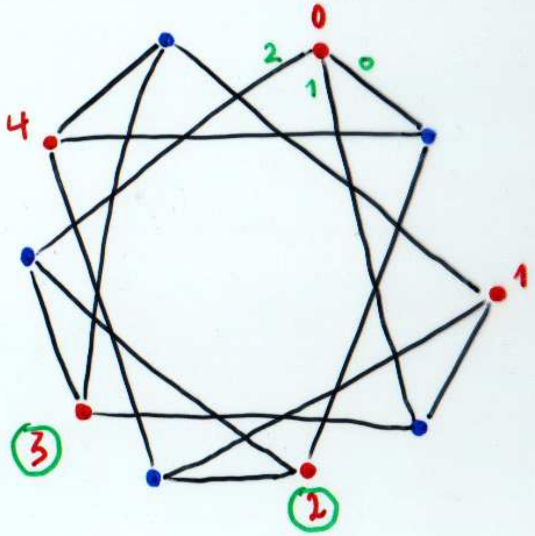
biparti-incident : $x \rightarrow x_1, x_2$

$(x,y) \in \cancel{A} \Leftrightarrow \{x_1, y_2\} \in A$

$$\boxed{\text{KNÖDEL} : \ \gamma_i = 2^i - 1}$$

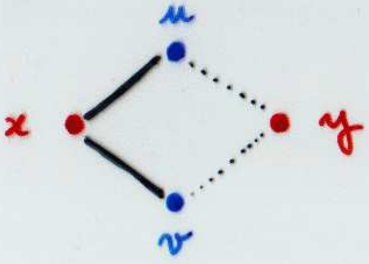
BUT: Trouver un algorithme qui

- Input: un graphe G non orienté avec 2n sommets
- Output: oui/non, si oui donné la numération des sommets



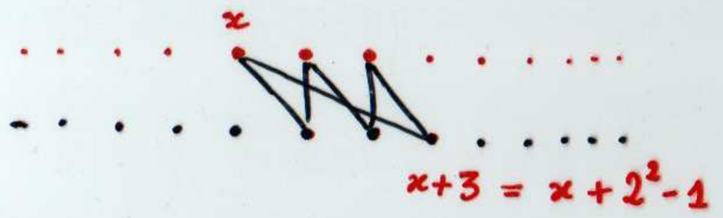
KNÖDEL $n = 5$

Algo. type Hypercube



Idée générale : caractérisation des cycles de longueur 6.

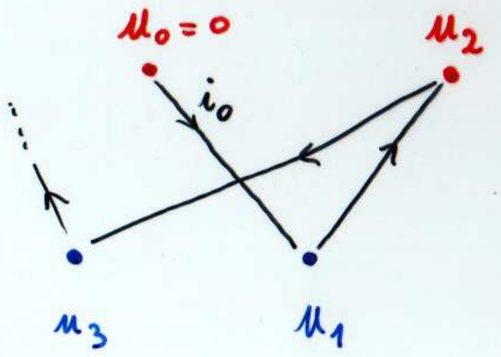
Rem. : Knödel a toujours des cycles de longueur 6.



Plus généralement: un biparti-incident graphe de circulant $(\gamma_0, \dots, \gamma_k)$ a un cycle de longueur 6

$\Leftrightarrow \exists\, i_0 \dots i_5$ tq

$$\begin{cases} \gamma_{i_0} + \gamma_{i_2} + \gamma_{i_4} = \gamma_{i_1} + \gamma_{i_3} + \gamma_{i_5} + \alpha n \\ \gamma_{i_j} \neq \gamma_{i_{j+1 \bmod 6}} \quad , \quad \alpha \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

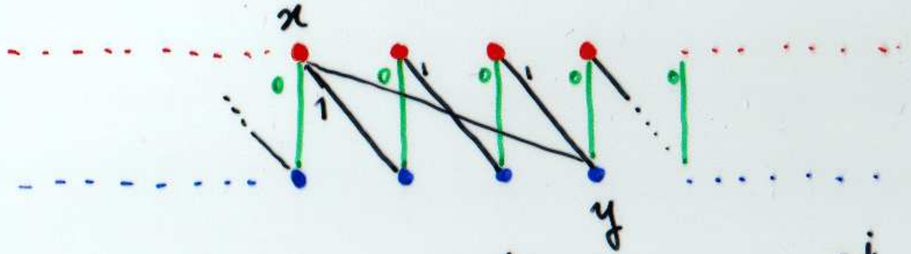


$$\begin{cases} u_1 = u_0 + \gamma_{i_0} \\ u_1 = u_2 + \gamma_{i_1} \pmod n \\ \vdots \end{cases}$$

Equation: (1) $\boxed{2^{x_0} + 2^{x_2} + 2^{x_4} = 2^{x_1} + 2^{x_3} + 2^{x_5} + \alpha n}$

Claim 1

Si les arêts de dimension 0 et 1 peuvent être identifiées, alors on peut reconnaître KNÖDEL.



vérifier $y = x + 2^i - 1 \pmod{n}$

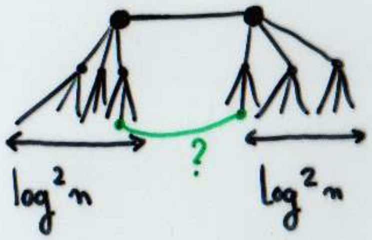
Claim 2

Si les arêts de dimension 0 et k peuvent être identifiées, alors on peut identifier la dim. 1.

Structure générale de l'algorithme

1. Calculer $P_i = \#$ de cycles de long. 6 dans un Knödel pour la dimension i $\forall i = 0, \dots, k$.

   $\Rightarrow$ temps $O(n \log^5 n) = O(|E| \cdot \log^4 n)$



$\log^4 n$ tests par arête

2. Calculer $C_6(e)$ pour chaque $e \in E$ du graphe G.

➤ 3. Identifier les arêts de dimension 0 et k.

4. On conclu avec claim 1 et claim 2.

claim 2 Si dimension 0 et k sont distinguées, alors 0, et 1 le peuvent.

preuve On considère tous les cycles de type

$$(\underline{k}, \gamma, \underline{0}, \gamma', \underline{0}, \gamma'') \qquad \begin{array}{l} \gamma \notin \{0, k\} \\ \gamma' \neq 0 \\ \gamma'' \notin \{0, k\} \end{array}$$

- impossible si $\alpha = 1$ ou 2, aucun cycle.
- si $\alpha = 0$, $\boxed{2^k + 2^0 + 2^0 = 2^\gamma + 2^{\gamma'} + 2^{\gamma''}.}$

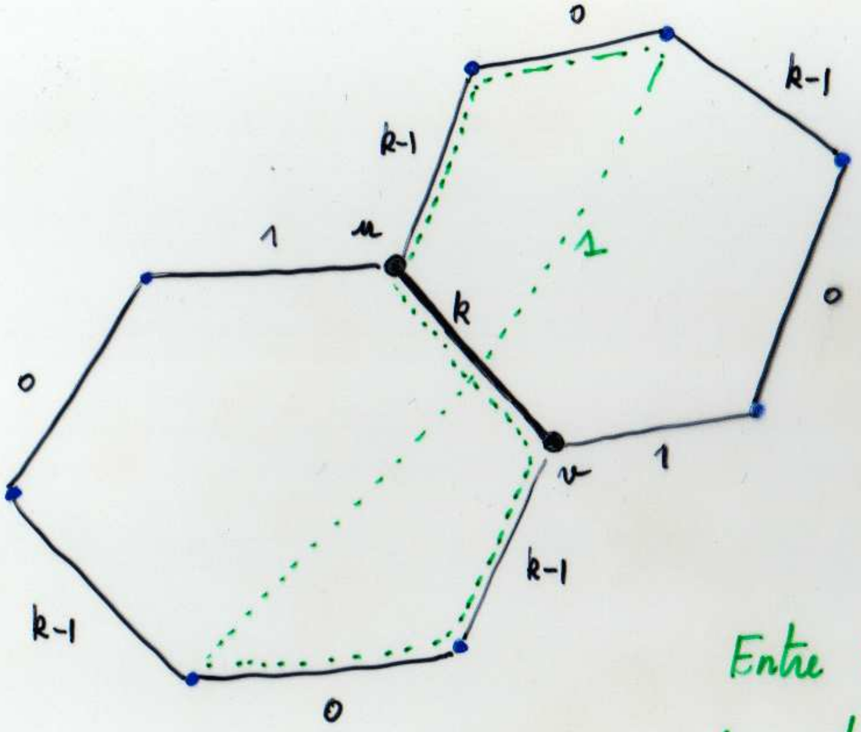
$\Rightarrow$ 2 gammas sont égaux. $\quad 2^k + 2 = 2^{p+1} + 2^q$

donc soit $\begin{cases} p=0 \text{ et } q=k \to \text{mais } \gamma \neq 0. \\ p=k-1 \text{ et } q=1 \end{cases}$
ou

donc

$$(k, k-1, 0, k-1, 0, \underline{1})$$
$$(k, k-1, 0, \underline{1}, 0, k-1)$$
$$(k, \underline{1}, 0, k-1, 0, k-1)$$

Claim 2 (suite et fin)


0
k-1
k-1
1
u
1
0
k
0
1
v
k-1
k-1
0
1

Entre 1 et $k-1$, seule
1 adjacent à u (ou v)
est utilisée 1 seule fois.

□

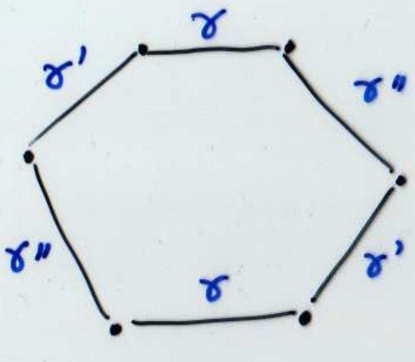
Lemme: Si $\alpha = 0$, l'Eq. (1) a 4 types de solution $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ à une permutation circulaire près.

a) $(\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma, \gamma', \gamma'')$

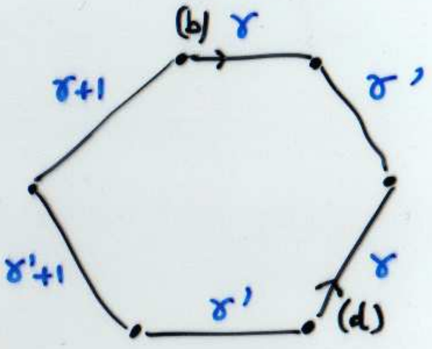
b) $(\gamma, \gamma', \gamma, \gamma', \gamma'+1, \gamma+1)$

c) $(\gamma, \gamma+1, \gamma, \gamma', \gamma'+1, \gamma')$

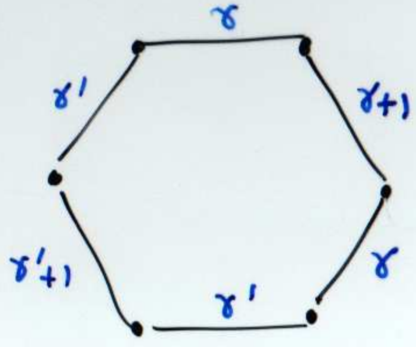
d) $(\gamma, \gamma', \gamma, \gamma+1, \gamma'+1, \gamma')$



(a)

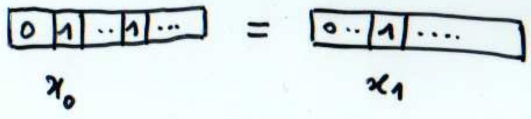

(b) γ
γ+1
γ'
γ'+1
γ
γ'
(d)

(b)(d)



(c)

$$\alpha = 0 \Rightarrow 2^{x_0} + 2^{x_2} + 2^{x_4} = 2^{x_1} + 2^{x_3} + 2^{x_5}$$



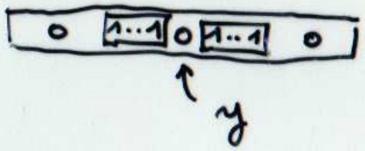
$B_1(n)$ = # blocks de 1 consecutifs dans l'écriture binaire de n. $\boxed{\underline{11}0\underline{111}00\underline{1}0}$

$B_1(n) = 3$

Lemme : Si $B_1(n) \geq 6$, l'Eq. ① a des solutions seulement pour $\alpha = 0$.

preuve $B_1\left(2^{x_0} + 2^{x_2} + 2^{x_4}\right) \leq 3$ et au plus 3 "1"

$B_1\left(n + 2^{y}\right) \geq B_1(n) - 1$ (et au moins 2 "1" si ↘)



si $\alpha = 1 \Rightarrow B_1\left(n + 2^{x_1} + 2^{x_3} + 2^{x_5}\right) \geq B_1(n) - 3$

et au moins 4 "1" $\perp$

Si $\alpha = 2 \Rightarrow B_1(2n) = B_1(n)$ idem.

Lemme : Si $B_1(n) \geq 6$ alors

$$C_6(e) = \begin{cases} \left.k^2 + 5k - O(1)\right] & \text{si dimension } 0 \\ \left.\begin{matrix} k^2 + 8k - O(1) \\ k^2 + 8k - O(1) \\ k^2 + 8k - O(1) \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{———} \;\; 1 \\ \text{———} \;\; r \in \{2, \dots, k-2\} \\ \text{———} \;\; k-1 \end{matrix} \\ \left.k^2 + 2k - O(1)\right] & \text{———} \;\; k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Par claim 1 & claim 2 algorithme en $O(n \log^5 n)$,

si $B_1(n) \geq 6$.

Si $\boxed{B_1(n) = 1, 2, \dots, 5}$?

(Eq. (1) a solution pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$)

1. On résoud le cas $n = 2^{k-1}$ par cycles de longueur 4. $O(n \log^3 n)$.

2. On pose $n = 2^k + n'$, $n' \neq 0$.

si $\alpha = 2$, $2^{x_0} + 2^{x_2} + 2^{x_4} = 2^{x_1} + 2^{x_3} + 2^{x_5} + 2^{k+1} + 2n'$

$\Rightarrow x_0 = x_2 = k$ et $2^{x_4} = 2^{x_1} + 2^{x_3} + 2^{x_5} + 2n'$

donc contribue à un nombre constant de sol.

donc si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$ $\quad C_6(e) = k^2 + pk - O(1)$ avec $p = \begin{cases} 5 & \text{dim. } 0 \\ 8 & \text{autre} \\ 2 & \text{dim. } k \end{cases}$

3. Si $\boxed{\alpha = 1}$

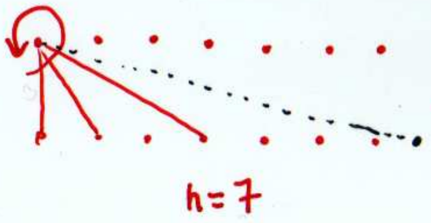
Si $\alpha = 1$

3 cas :

- $B_1(n') = 1$ ....
- $B_1(n') = 2$ ....
- $B_1(n') = 3$ ....

→ sous cas $n' = \boxed{11111\ldots1}$ et $\ell = k-1$, avec ℓ placé au-dessus du début du bloc de 1 et une flèche vers celui-ci

i.e. $\boxed{n = 2^{k+1} - 1}$

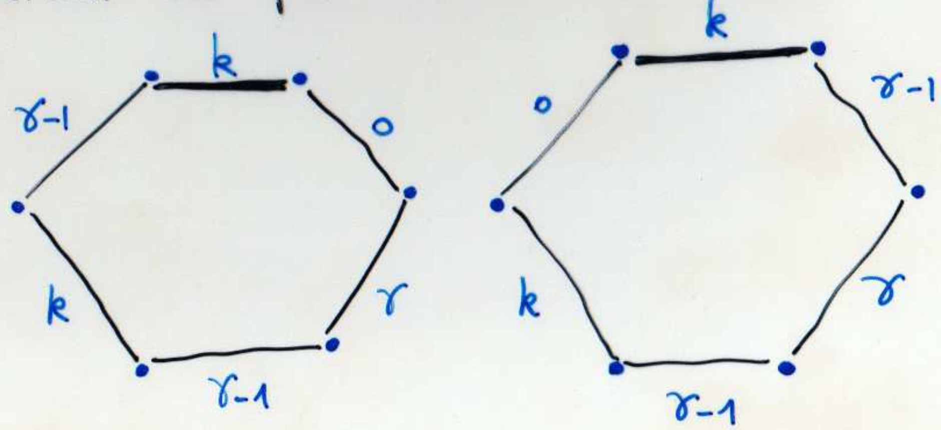


Dans ce cas le KNÖDEL est arête-transitif !

Idée: Si $n = 2^{k+1} - 1$, alors utiliser les cycles de longueur 6 utilisant un chemin de longueur 3.

Lemme : Tout cycle de long. 6 utilisant le chemin de long. 3 $(k, 0, k)$ apparait un nombre non constant de fois, et c'est le seul chemin.

- si $\alpha = 0$ ... nombre constant de fois
- si $\alpha = 2$ ... $\varnothing$ solution
- si $\alpha = 1$ →


k
$\gamma-1$
0
k
γ
$\gamma-1$
k
0
$\gamma-1$
k
γ
$\gamma-1$

Conclusion

- Algo. de reconnaissance en $O(n \log^5 n)$
- KNÖDEL n'est pas arête-transif sauf si $n = 2^{k+1} - 1$.
- Autres circulants : $\gamma_i = F(i+1) - 1$
- si $\gamma_i = 4^i$, alors ne marche pas avec cycles de long. 6. ⇒ cycle de long. 8 ?
- Cas général ?