# *Réseaux de télécommunication minimaux embarqués tolérant aux pannes*

J.-C. Bermond[†], O. Delmas[‡], F. Havet[§], M. Montassier[¶], et S. Pérennes[‖]

*Projet MASCOTTE, I3S-CNRS-INRIA & LaBRI UMR CNRS 5800, Université Bordeaux I.*

Cet article traite de la conception de réseaux embarqués dans les satellites. Ces réseaux doivent connecter des entrées (correspondant aux signaux arrivant au satellite) à des sorties (correspondant à des amplificateurs), même lors de l'apparition de quelques pannes des amplificateurs. Ces réseaux embarqués sont constitués de commutateurs de taille et de masse non négligeables. Ainsi, nous cherchons à minimiser le nombre de commutateurs, tout en respectant les conditions suivantes : chaque entrée et chaque sortie sont connectées à exactement un commutateur ; un commutateur est adjacent à $\Delta = 2r$ liens ; il y a $n$ entrées et $n+k$ sorties ; quel que soit l'ensemble de $k$ sorties en panne, les $n$ entrées sont routées vers les $n$ sorties valides restantes via des chemins arêtes-disjoints. Nous appelons de tels réseaux des réseaux valides tolérant $k$ pannes. Soit $\mathcal{N}(n,k,r)$ le nombre minimal de commutateurs d'un réseaux valides tolérant $k$ pannes possédant $n$ entrées, constitué de commutateurs de degré $\Delta = 2r$. Dans cet article, nous établissons la valeur exacte de $\mathcal{N}(n,4,r)$, c'est-à-dire du nombre minimal de commutateurs des réseaux tolérant 4 pannes composés de commutateurs de degré $\Delta = 2r$ ; nous donnons également les constructions des réseaux associés.

**Keywords:** réseaux embarqués, tolérance aux pannes, routage arêtes-disjoints, satellite, optimisation.

## 1 Problématique et résultats obtenus

Certains satellites de télécommunication reçoivent des signaux qui sont routés à travers un réseau d'interconnexions point à point vers des amplificateurs qui réémettent ces signaux. Dans notre cas, tous les amplificateurs sont identiques ou indifférenciés ; un signal peut être réémis par n'importe lequel des amplificateurs. Pendant la durée de vie du satellite, des amplificateurs peuvent tomber en panne de façon définitive. À cet effet, il est nécessaire d'en prévoir un nombre supérieur au nombre d'entrées de signaux, car le réseau doit être en mesure de connecter les entrées (correspondant aux signaux entrants) à des sorties (correspondant aux amplificateurs), même lors de l'apparition de pannes de quelques amplificateurs. Le réseau est constitué d'entrées, de sorties, de liens bi-directionnels, et de commutateurs respectant les propriétés suivantes :

- chaque entrée et chaque sortie sont connectées à exactement un commutateur ;
- un commutateur possède $\Delta$ liens ;
- il y a $n$ entrées et $n+k$ sorties.

La technologie employée pour construire ce type de réseaux s'appuie sur l'utilisation de guides d'ondes ; aussi, les connexions entre les entrées et les sorties doivent s'établir via des ***chemins arêtes-disjoints***.

Ces réseaux doivent posséder une propriété de tolérance aux pannes qui s'exprime de la manière suivante : quel que soit l'ensemble de $k$ sorties en panne, les $n$ entrées sont routées vers les $n$ sorties valides restantes via des chemins arêtes-disjoints. De tels réseaux sont appelés ***réseaux valides tolérant*** $k$ ***pannes***. Leur technologie est relativement lourde (en terme de poids) et n'utilise pas de simples composants électroniques. Chaque commutateur induit un surcoût non négligeable en poids se répercutant sur le coût de lancement

[†]Projet MASCOTTE, I3S-CNRS-INRIA, *Jean-Claude.Bermond@sophia.inria.fr*
[‡]LaBRI UMR CNRS 5800, Université Bordeaux I, *Olivier.Delmas@labri.u-bordeaux.fr*
[§]Projet MASCOTTE, I3S-CNRS-INRIA, *Frederic.Havet@sophia.inria.fr*
[¶]LaBRI UMR CNRS 5800, Université Bordeaux I, *montassi@labri.fr*
[‖]Projet MASCOTTE, I3S-CNRS-INRIA, *Stephane.Perennes@sophia.inria.fr*

du satellite. Ainsi, nous cherchons à concevoir des réseaux valides à faible coût en minimisant le nombre de commutateurs. La figure 4 montre deux exemples de routage des entrées sur des sorties valides dans un réseau possédant 26 entrées, construit de commutateurs de degré 6 et tolérant 4 pannes.

Ce problème, proposé par ALCATEL SPACE INDUSTRIES, fut introduit dans [BDD02] pour des réseaux tolérant 4 pannes et utilisant des commutateurs de degré $\Delta = 4$, puis dans [BPT01] (commutateurs de degré $\Delta = 4$, $k \leq 12$ pannes). Des variations de cette problématique ont été considérées dans [Hav02] lorsqu'il faut gérer en plus un ensemble de signaux prioritaires. Dans cet article, nous résolvons le problème de réseaux minimaux composés de commutateurs de degré pair $\Delta = 2r$ pour $r \geq 3$, tolérant $k = 4$ pannes. Le cas $k = 2$ pannes est une extension immédiate des résultats de [BPT01].

Nous noterons $(n,k,r)$***-réseau*** un réseau ayant $n$ entrées, $n+k$ sorties, composé de commutateurs de degré $\Delta = 2r$. Un $(n,k,r)$-réseau est dit ***valide***, s'il vérifie la propriété de tolérance aux $k$ pannes. On appelle $\mathcal{N}(n,k,r)$ ***le nombre minimal de commutateurs*** d'un $(n,k,r)$-réseau valide. On dira qu'un $(n,k,r)$-réseau valide est ***minimal***, s'il est constitué de $\mathcal{N}(n,k,r)$ commutateurs.

Un $(n,k,r)$-réseau peut être défini comme un triplet $H = \{(V,E),i,o\}$ où $G = (V,E)$ est un graphe et $i$, $o$ sont des fonctions positives ou nulles définies sur $V$ (ensemble des commutateurs), appelées *fonction d'entrées* et *fonction de sorties*. Un commutateur $v$ de degré $\Delta$ ayant $i(v)$ entrées et $o(v)$ sorties possède $\Delta - i(v) - o(v)$ liens disponibles pour le connecter au reste du réseau. Le nombre total d'entrées est $i(V) = \sum_{v\in V} i(v) = n$, et le nombre total de sorties est $o(V) = \sum_{v\in V} o(v) = n+k, k \geq 0$.

N'importe quelle fonction $o'$ définie sur $V$ telle que $\forall v,\ o'(v) \leq o(v)$ et $o'(V) = n$ est dite *fonction de sorties valides* : le choix d'une telle fonction revient à choisir un ensemble de $k$ sorties en panne parmi les $n+k$ sorties disponibles. Notons que $o(v) - o'(v)$ est le nombre de pannes du sommet $v$.

Un $(n,k,r)$*-réseau est valide*, si quelque soit la fonction de sorties valides $o'$, il existe $n$ chemins arêtes-disjoints dans $G$, tels que chaque sommet $v \in V$ est sommet initial de $i(v)$ chemins et sommet terminal de $o'(v)$ chemins.

**Dans cet article, nous établissons tout d'abord une minoration de $\mathcal{N}(n,4,r)$, c'est-à-dire du nombre minimum de commutateurs des réseaux tolérant 4 pannes composés de commutateurs de degré $\Delta = 2r$. Puis, nous construisons des réseaux valides atteignant cette borne.**

## 2 Réduction du problème : les $(n,k,r)$-noyaux

Pour nous permettre d'établir une minoration de $\mathcal{N}(n,4,r)$, nous généralisons l'approche faîte dans [BPT01] consistant à utiliser un objet intermédiaire appelé $(n,k,r)$***-noyau***. Un $(n,k,r)$*-noyau* est un graphe biparti dont l'étude nous permet d'exhiber des équations à la base de la minoration.

De façon intuitive, le noyau contient deux classes de sommets : les *Blocs* et les *S-commutateurs*. La plupart des blocs correspond aux composantes connexes maximales formées de sommets $v$ vérifiant $i(v) = r-1$. En effet, on peut montrer qu'un commutateur est relié à au plus $r-1$ entrées dans un $(n,k,r)$-réseau minimal ; de plus, pour $k \geq 3$, les blocs $B$ d'un $(n,k,r)$-noyau construit à partir d'un $(n,k,r)$-réseau valide contiennent au plus 2 sorties et vérifient la relation $\delta(B) = i(B) + 2 - o(B)$ où $\delta(B)$ représente le degré du bloc $B$ (cf. figure 1). Les $S$-commutateurs sont quant à eux en bijection avec les sommets ayant $i(v) < r-1$. La construction du noyau étant relativement technique, nous donnons ici seulement sa définition ainsi que les principales relations (ou propriétés) que nous utilisons. Un exemple de construction du noyau est donné en figure 2.

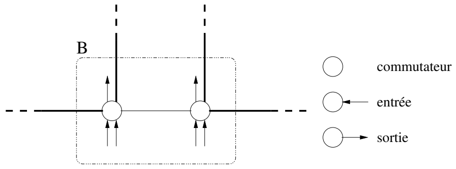


**FIG. 1:** Exemple de bloc pour $r = 3$. Il vérifie : $\delta(B) = i(B) + 2 - o(B) = 4$

**Définition 1** *Un graphe biparti $K = (\mathcal{S}, \mathcal{B}, i, o)$ est un $(n,k,r)$-noyau si les S-commutateurs $s \in \mathcal{S}$ sont de degré au plus $2r$ et vérifient $i(s) < r-1$, $o(s) = 0$ et si les blocs $B \in \mathcal{B}$ vérifient $o(B) \leq 2$ et $\delta(B) = i(B) + 2 - o(B)$.*

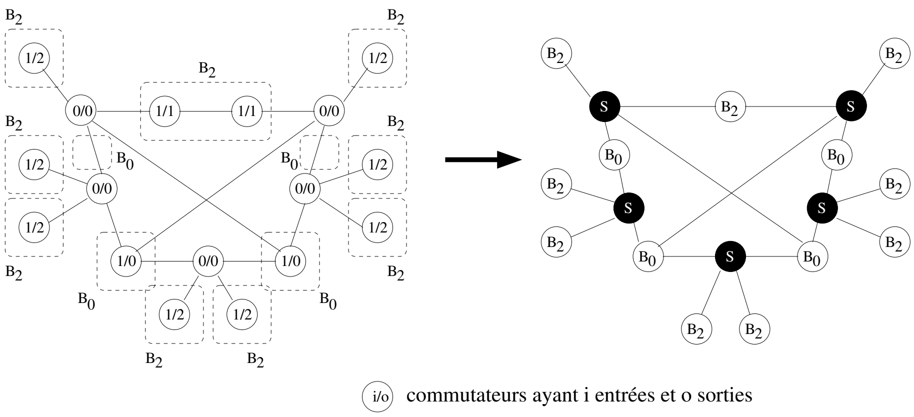


**FIG. 2:** Exemple du passage d'un $(12,6,2)$-réseau à son noyau.

Nous appelons $|S|$ le nombre de $S$-commutateurs, $|S_B|$ le nombre de commutateurs inclus dans les blocs, $|S_{tot}| = |S| + |S_B|$ le nombre de commutateurs total. Pour $j = 0,1,2$ (il y a au plus deux sorties sur un bloc, cf. définition 1), nous notons $B_j$ un bloc contenant $j$ sorties, $n_j$ le nombre d'entrées contenues dans l'ensemble des blocs $B_j$, $b_j$ le nombre de blocs $B_j$.

Soit $e_j$ l'ensemble des arêtes adjacentes aux blocs $B_j$. Nous avons les relations suivantes :

$$e_0 = n_0 + 2b_0 \quad (1)$$
$$e_1 = n_1 + b_1 \quad (2)$$
$$e_2 = n_2 \quad (3)$$

Comptons maintenant le nombre total d'entrées et le nombre total de sorties dans le noyau :

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + \sum_{s \in S} i(s) \quad (4)$$
$$n + k = 2b_2 + b_1 \quad (5)$$

Nous dirons qu'un $(n,k,r)$-noyau est valide s'il est l'image d'un $(n,k,r)$-réseau valide. Enfin, pour répondre à la question si oui ou non un noyau est l'image d'un réseau valide, nous pouvons adapter le théorème de FORD-FULKERSON [CCPS98, BPT01] qui nous fournit un critère de coupe.

**Lemme 1 (Critère de coupe)** *Un $(n,k,r)$-réseau est valide si et seulement si son $(n,k,r)$-noyau associé vérifie :*

$$\forall X \subset S, \quad |\Gamma(X)| \geq r|X| + \frac{1}{2}\min(o(\Gamma(X)), k))$$

*où $\Gamma(X)$ est le voisinage de X. De plus n'importe quel noyau valide est l'image d'un réseau valide.*

# 3 Minoration du nombre de commutateurs des réseaux tolérant 4 pannes

Le but est de déterminer $\mathcal{N}(n,4,r)$. Tout d'abord, nous rappelons le résultat pour $r=2$ établi dans [BPT01] : $\mathcal{N}(n,4,2) = \lceil \frac{5n}{4} \rceil$. Les réseaux associés sont donnés dans [BDD02, BPT01].

**Proposition 1** *Pour $r \geq 3$,* $\mathcal{N}(n,4,r) \geq \left\lceil \frac{nr+2}{r^2-2r+2} \right\rceil$

**Preuve**
Comme un bloc $B_2$ contient au moins un commutateur, alors :

$$b_2 \leq |S_B| \tag{6}$$

Supposons que l'on ait $|S_B|$ commutateurs dans les blocs, comptons alors les entrées :

$$(r-2)|S| \geq \sum_{s \in S} i(s) \geq n-(r-1)|S_B| \tag{7}$$

Maintenant, détaillons les adjacences des $S$-commutateurs :

$$\begin{array}{rcll} 2r|S| & = & \sum_{s\in S}(2r-i(s)) + \sum_{s\in S} i(s) & \\ & = & e_0+e_1+e_2+\sum_{s\in S} i(s) & \\ & = & n_0+n_1+n_2+\sum_{s\in S} i(S)+2b_0+b_1 & \text{par (1), (2) et (3)} \\ & = & 2b_0+b_1+n & \text{par (4)} \\ & = & 2n+4+2b_0-2b_2 & \text{par (5)} \end{array}$$

De plus, par (6), nous obtenons :

$$2r|S| \geq 2n - 2|S_B| + 4 \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) donnent une minoration de $|S_{tot}| = |S| + |S_B|$. D'où $|S_{tot}|$ est au moins supérieur à :

$$\max\left\{ |S_B| + \frac{n-(r-1)|S_B|}{r-2}, |S_B| + \frac{n-|S_B|+2}{r} \right\}.$$

Une fonction croît alors que l'autre décroît, le minimum est atteint lorsque les deux bornes sont égales, i.e. pour : $|S_B| = 2\,\frac{n-r+2}{r^2-2r+2}$. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{N}(n,4,r) \geq \left\lceil \frac{nr+2}{r^2-2r+2} \right\rceil$$

□

Une solution correspond à cette borne pour $b_2 = |S_B| = \frac{n_2}{r-1}, b_0 = 0$. Par exemple pour $r=4$, nous avons $|S_B| = \frac{n}{5}$ et $\lceil \frac{2n+1}{5} \rceil$ commutateurs (voir figure 5).

# 4 Construction de $(n,4,r)$-réseaux minimaux

**Proposition 2** $\mathcal{N}(n,4,3) \leq \left\lceil \frac{n+\lceil \frac{n+4}{5} \rceil}{2} \right\rceil$

La figure 3 donne la construction générale des réseaux permettant d'établir le proposition 2. La preuve de la validité de ces réseaux s'appuie sur le *critère de coupe* (lemme 1).

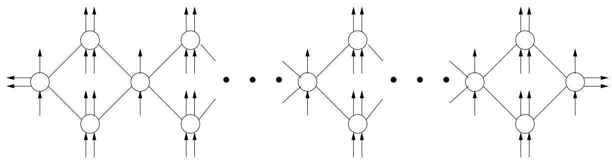

**FIG. 3:** $(5m+1,4,3)$-réseau minimal. Les flèches entrantes représentent les entrées, les flèches sortantes, les sorties. Quelques variations de ce réseau permettent de donner des réseaux valides pour $n \not\equiv 1 \bmod 5$.

La figure 4 fournit deux exemples de routage des entrées sur des sorties valides pour deux jeux de pannes.

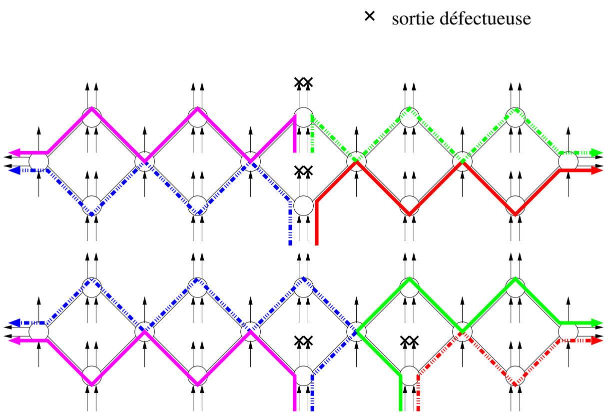


**FIG. 4:** Les entrées sont routées localement sur les sorties attenantes lorsqu'elles sont valides. Les 4 entrées qui ont perdu leurs sorties locales utilisent les chemins arêtes-disjoints représentés sur la figure pour atteindre des sorties valides.

Dans la suite, un commutateur ayant $i$ entrées et $o$ sorties est appelé commutateur de type $i|o$.

**Proposition 3** *Pour* $p \geq 1$, $\mathcal{N}(5p,4,4) \leq 2p+1$

Cette borne est établie à partir de la construction du réseau de la figure 5. Là encore, la preuve de la validité du réseau est basée sur le critère de coupe.

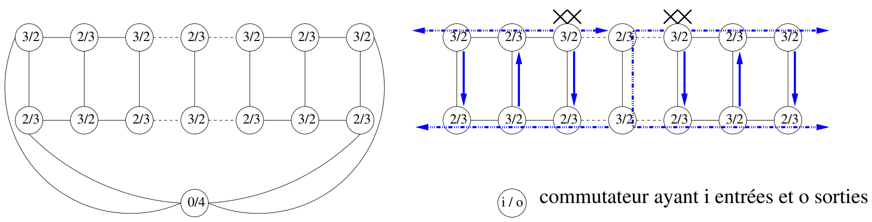


**FIG. 5:** Réseaux construits avec des commutateurs de degré 8 ($r=4$) tolérant 4 pannes et un exemple de routage pour un jeu de 4 pannes.

**Proposition 4** *Pour* $p \geq 1$, $r > 4$, $\mathcal{N}(p(r^2-2r+2),4,r) \leq rp+1$.

La preuve est basée sur la démonstration de la validité (via le critère de coupe) d'un réseau atteignant cette borne. Un tel réseau (cf. figure 6) est construit de la manière suivante : supposons que $n = p(r^2-2r+2)$, le réseau comporte les éléments suivants :

- $2p$ commutateurs $b_1, b_2, \dots, b_{2p}$ de type $r-1|2$ correspondant à autant de blocs $B_2$ dans le noyau ;
- $2p$ commutateurs $s_1, s_2, \dots, s_{2p}$ de type $r-2|r-1$ ;
- $p(r-4)$ commutateurs de type $r-2|r$ distribués dans $2p$ ensembles $S_i$, $1 \leq i \leq 2p$, de cardinalité $\lceil \frac{r-4}{2} \rceil$ si $i$ est impair et $\lfloor \frac{r-4}{2} \rfloor$ si $i$ est pair.
- un commutateur $u$ de type $0|r$.

Les éléments sont connectés comme suit :

- pour $1 \leq i \leq 2p$, $s_i$ est relié à $b_i$ ;
- pour $1 \leq i \leq 2p-1$, $s_i$ est relié à $b_{i+1}$ et $b_i$ est relié à $s_{i+1}$ ;
- pour $1 \leq i \leq 2p$, chaque élément de $S_i$ est connecté à $b_i$ et $b_{i+1}(s_{2p+1} = s_1$ et $b_{2p+1} = b_1)$ ;
- $u$ est relié à $s_1$, $s_p$, $b_1$ et $b_{2p}$.

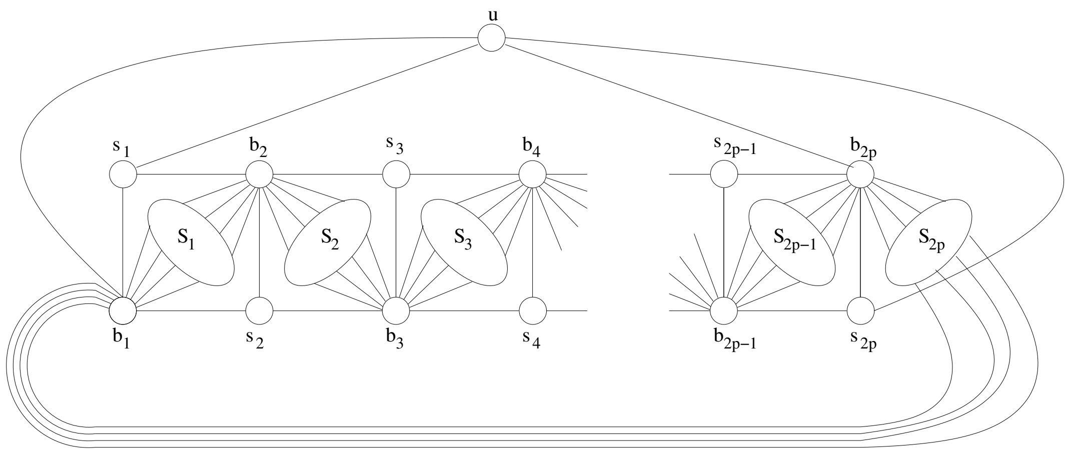


**FIG. 6:** Réseaux construits avec des commutateurs de degré $2r$ pour $r > 4$ et tolérant 4 pannes.

À partir de la minoration et des majorations, nous pouvons établir :

**Corollaire 1** *Pour* $r \geq 3$, $\mathcal{N}(n,4,r) = \frac{nr}{r^2-2r+2} + O(1)$

# 5 Extension des travaux

Nous poursuivons actuellement cette étude dans un cadre plus général où l'objectif est de déterminer $\mathcal{N}(n,k,r)$, et de construire des réseaux minimaux, ou des réseaux ayant un nombre de commutateurs proches de $\mathcal{N}(n,k,r)$.

# Références


[BDD02] J-C. Bermond, E. Darrot, and O. Delmas. Design of fault tolerant on-board networks in satellites. *Networks*, 40 :202–207, 2002.

[BPT01] J-C. Bermond, S. Pérennes, and Cs. D. Töth. Design of fault tolerant flow networks. Manuscript, 2001.

[CCPS98] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley-Inter-Science in Discrete Mathematics and Optimization, 1998.

[Hav02] F. Havet. Design of fault tolerant satellite networks with priorities via selectors. In *Proc. of SIROCCO'02*, pages 165–180, Andros, Greece, juin 2002.