Groupage par tubes

J-C. Bermond, O. de Rivoyre, S. Pérennes et M. Syska

Projet MASCOTTE*, CNRS, I3S & INRIA Sophia Antipolis.*
{Jean-Claude.Bermond,Olivier.Rivoyre,Stephane.Perennes,Michel.Syska}@sophia.inria.fr
Ce travail a été partiellement financé par le projet européen CRESCCO et l'action COLOR DYNAMIC.

Dans cet article nous donnons des bornes sur le coût du groupage dans les réseaux où le trafic est un ensemble de requêtes transportées dans une hiérarchie de couches électroniques ou optiques (réseaux dorsaux SONET/SDH ou WDM). Nous nous limitons au cas du groupage entre deux couches avec un coefficient de groupage unique : on groupe au plus C requêtes ensemble dans un «tube» logique. Un tube est une connexion virtuelle entre deux noeuds du réseau. L'objectif ici est de minimiser le nombre de tubes utilisés, ce qui est une bonne mesure du coût actuel des réseaux où les équipements de (de)multiplexage mis aux bouts des tubes constituent la part importante du coût. Notons que le problème réel est plus complexe puisque certains choix de tubes logiques sont incompatibles avec la capacité physique du réseau.

Nous considérons le cas d'un trafic simple (au plus une requête pour un couple de nœuds). Nous montrons que le problème est déjà NP-difficile avec $C = 2$, et nous donnons une borne inférieure sur le nombre de tubes et caractérisons les cas où elle est atteinte.

Dans le cas d'une matrice de trafic uniforme (*All-to-All*, une requête entre chaque couple de sommets), nous ramenons le problème à l'existence de décompositions des arcs du graphe complet orienté symétrique en graphes particuliers, ce qui est une variante du problème de *packing* de graphe. Ceci nous permet de résoudre les cas $C = 2$ et $C = 3$ et de donner une borne supérieure sur le nombre de tubes (au plus $(C+1)/C$ fois la borne inférieure).

Keywords: réseau optique, WDM, routage, groupage, théorie des designs, décomposition de graphe.

1 Introduction

Le groupage de trafic (ou *grooming*) est le terme générique utilisé pour le problème qui consiste à agréger des flux de faible débit dans des flux - tubes - de plus gros débit et de capacité C fois supérieure. Les flux groupés dans un tube sont commutés dans les nœuds intermédiairs (le long du chemin associé au tube) par des équipements de faible coût. L'objectif est de minimiser le coût des équipements des nœuds du réseau, principalement aux extrémités de ces tubes. Ce problème est particulièrement important dans les réseaux de fibres optiques où le coût des conversions optique/électronique est prépondérant par rapport au coût de transmission.

Par exemple, dans un réseau WDM (multiplexage en longueurs d'onde), le problème consiste à affecter les flux SONET/SDH aux longueurs d'onde. Un autre exemple apparaît dans les réseaux MPLS où l'on souhaite grouper un ensemble de LPS (Label Switched Paths) pour les transporter sur les longueurs d'onde d'un réseau MPλS. Nous renvoyons le lecteur aux très nombreux articles de la littérature, par exemple la synthèse récente de [DR02].

Pour notre part, nous avons travaillé sur ce problème dans le cadre du contrat RNRT PORTO (Planification et Optimisation des Réseaux de Transport Optiques) en collaboration avec Alcatel et France Télécom R&D. Dans ce cas il s'agit d'acheminer des requêtes exprimées en STM-16 (2,5 Gbs) sur le réseau, en associant chaque STM-16 à une longueur d'onde. Les longueurs d'onde sont groupées dans des bandes qui sont elles même groupées dans des fibres (elles mêmes groupées dans des câbles). La seule couche optique induit de multiples problèmes de groupage, auxquels s'ajoute la contrainte WDM qui impose que deux flux partageant un lien aient des longueurs d'onde différentes. Les formulations de ces problèmes en programmation linéaire en nombre entiers sont possibles, mais illusoires dans la pratique (même pour des instances de réseaux de moins de dix nœuds avec seulement deux requêtes). On cherche donc le plus souvent à optimiser un des sous problèmes. Le coût le plus important dans un réseau optique est celui des équipements et celui ci dépend principalement du nombre de tubes utilisés (chaque tube nécessite un équipement beaucoup plus complexe en ses extrémités qu'aux nœuds intermédiaires). De plus la problématique du groupage est bien moins comprise que celle plus ancienne du routage, en particulier de part sa nature *concave* (i.e économies d'échelle).

Dans cet article nous étudions donc spécifiquement l'aspect groupage. Nous considérerons que l'on doit grouper des requêtes de trafic non routées dans des tubes, nous reprenons la modélisation introduite dans [HPS02] (qui considérait un trafic routé) en supposant que les tubes ont un coût unique (induit par leur deux extrémités). Nous cherchons donc une topologie logique utilisant un nombre minimum de liens (tubes) permettant d'établir le trafic. Notons que les tubes déterminés devront être plongés dans le réseau physique, ce qui induit un problème de routage complexe de part sa nature insécable. Notre modèle est donc partiel puisque nous supposons que les arcs du réseau physique ont la capacité de supporter les tubes créés. Il modélise cependant plus exactement les économies d'échelle permises par le groupage du trafic que le modèle plus classique VPL (Virtual Path layout design voir la synthèse de [Zak98] et [Cho02] ou [BMPP03]) ; en effet en VPL les tubes ont une capacité infinie et on limite la complexité logique du réseau en imposant des contraintes sur le nombre de liens logiques utilisant un arc physique.

Notons enfin que si le réseau est un anneau unidirectionnel la problématique du routage est inexistante dans ce cas, et le problème se réduit au groupage du trafic. Ce cas est important en pratique : réseaux SONET ou réseaux en boucle, les anneaux étant éventuellement interconnectés entre eux via des “hubs”). En fait, la topologie physique réelle est un anneau bidirectionnel, mais comme chaque connexion $[a,b]$ est sécurisée par le chemin $[b,a]$, toute connexion utilise la bande passante uniformément sur le réseau.

Dans la suite de l'article nous commençons par modéliser le problème. Nous nous limitons au cas où il y a au plus une requête pour un couple de noeuds, et nous étudions plus particulièrement le cas d'un trafic uniforme (*All-to-All*). L'hypothèse peut paraître restrictive, mais elle revient à garantir pour un couple de nœuds une certaine bande passante (utilisée ou pas). Nous donnons une borne inférieure sur le nombre de tubes et caractérisons les cas où elle est atteinte. Dans le cas d'une requête entre chaque couple de sommets (*All-to-All*) nous ramenons le problème à l'existence de décompositions des arcs du graphe complet en graphes particuliers. Ceci nous permet de résoudre les cas $C = 2$ et $C = 3$ et de donner une borne supérieure sur le nombre de tubes égale à au plus $(C+1)/C$ fois la borne inférieure.

2 Modélisation du problème

Nous supposons le réseau fortement connexe (toute connexion peut être un tube), $V = \{1,2,...,n\}$ est l'ensemble des noeuds (ou serveurs). Une requête $r_{s,d}$ de s vers d (appelée aussi demande) correspond à un flux entier à envoyer d'un nœud source s vers un nœud destination d. Le trafic est représenté par une une instance I de communications, à savoir une famille de requêtes.

Un tube e est un chemin dans le réseau qu'un certain nombre de requêtes peuvent emprunter d'un bout à l'autre. Une requête rentrant dans un tube ne peut que sortir par l'autre extrémité du tube. On peut représenter l'ensemble des tubes comme un multigraphe virtuel H dont les arcs représentent les tubes.

Enfin on se donne un coefficient de groupage C qui indique le maximum de requêtes que peut contenir un tube. L'objectif est de minimiser le nombre total de tubes T utilisés pour réaliser le trafic avec un coefficient de groupage C. On peut résumer le problème ainsi :

Problème 1 *: Étant donné un trafic $I \subset (V \times V \times N)$, trouver un multigraphe virtuel H ayant le minimum de tubes permettant le routage de I dans H tout en respectant le coefficient de groupage C.*

Dans cet article nous considérerons surtout un trafic simple tel que pour tout couple de nœuds $(s,\ d)$ il y a au plus une requête de s à d. On peut alors représenter le trafic par un graphe orienté I sans arcs multiples dit graphe des requêtes. Sur la figure 1 on donne un ensemble de quatre tubes H qui permet de router un trafic avec 6 requêtes avec un coefficient de groupage $C = 2$.

Enfin nous considérerons le cas particulier où le trafic est du type *All-to-All*. Le graphe des requêtes est alors le graphe complet orienté symétrique. La figure suivante montre une solution optimale avec 8 tubes pour 4 noeuds et $C = 2$.

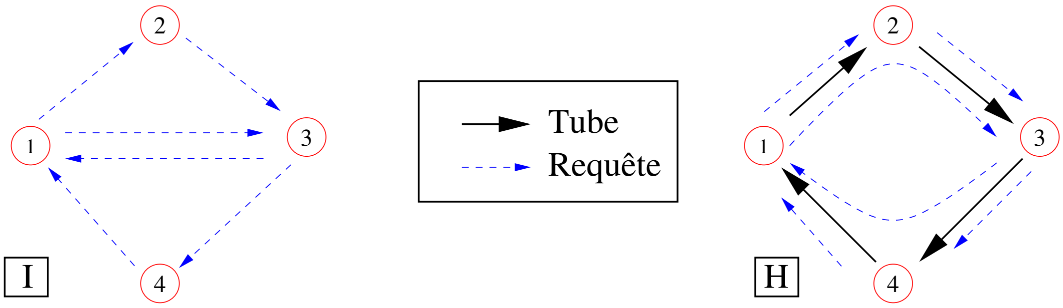

FIG. 1: Groupage avec 4 tubes d'un graphe de trafic de sept requêtes

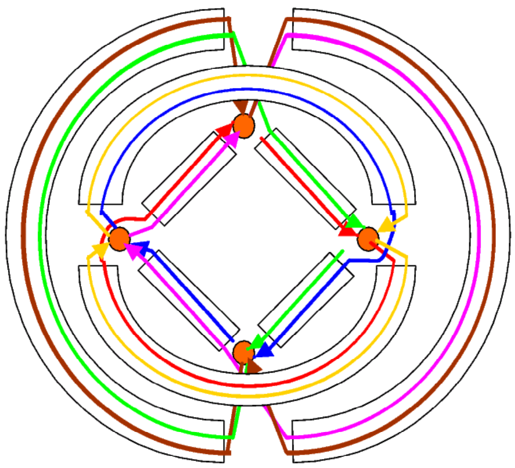

FIG. 2: Groupage avec 8 tubes d'un trafic complet pour $C = 2$

Notons que ce problème d'optimisation est différent du problème de groupage où l'on cherche à minimiser le nombre d'ADM's pour un trafic complet sur le cycle unidirectionnel avec un coefficient de groupage C (voir [BCM03] et [CM00]). Pour le cas $N = 4$, $C = 2$ il faut alors 9 ADMs (voir figure 3). Une solution avec A ADMs donne une solution pour notre problème utilisant $T = A$ tubes. On obtient ainsi pour $C = 2$ une solution avec $3R/4$ tubes alors que la solution optimale utilise $2R/3$ tubes comme nous le verrons dans la suite.

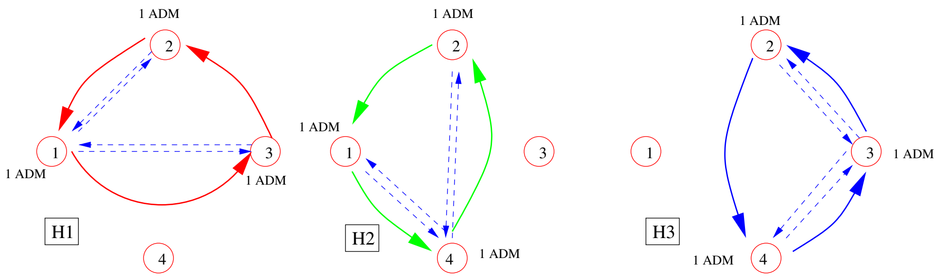

FIG. 3: Groupage avec 9 tubes minimisant le nombre d'ADMS pour $C = 2$

3 Borne inférieure

Proposition 1 *: Le nombre de tubes T d'un groupage par tubes du trafic simple comprenant R requêtes avec un coefficient de groupage C est minoré par* $\frac{2R}{C+1}$.

preuve : Soit R_i le nombre de requêtes dont le routage utilise exactement i tubes. On a $R = \sum_i R_i$. Le trafic étant supposé simple, le tube allant du noeud a au noeud b du multigraphe virtuel contient au plus une fois la requête $r_{a,b}$ dont le routage ne passe que par ce tube. Ce qui nous donne $T \geq R_1$. Enfin, comptant la capacité totale utilisée par les requêtes $S = \sum_i iR_i$, nous avons $S \leq C.T$, car les tubes sont de capacité C. On a donc $C \cdot T \geq \sum_i iR_i$ ou encore $C \cdot T \geq 2R + \sum_{i \geq 1}(i-2)R_i = 2R - R_1 + \sum_{i \geq 3}(i-2)R_i$. Comme $R_1 \leq T$ nous avons $C \cdot T \geq 2R - T + \sum_{i \geq 3}(i-2)R_i$ et donc $T \geq \frac{2R + \sum_{i \geq 3}(i-2)R_i}{C+1} \geq \frac{2R}{C+1}$.

Proposition 2 *: Un groupage par tubes du trafic simple I comprenant R requêtes avec un coefficient de groupage C a un coût égal à la borne inférieure donnée par la proposition 1 si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées :*
- Tous les tubes contiennent exactement C requêtes.
- Toute requête utilise moins de deux tubes.
- Tous les tubes contiennent la requête joignant les extrémités de ce tube.

preuve : La borne est atteinte si, et seulement si, les inégalités apparaissant dans la preuve de la proposition 1 deviennent des égalités ce qui implique $R_i = 0$ pour $i \geq 3$, $T = R$ et $C.T = R_1 + R_2$; c'est à dire les trois conditions.

4 Briques de recouvrement et bornes supérieures

L'idée de construction est de recouvrir et, si possible, décomposer l'instance I en sous instances I_j appelées briques comprenant R_j requêtes que l'on peut grouper dans un nombre minimal de tubes T_j, c'est à dire tel que $T_j = \frac{2R_j}{C+1}$. Ceci revient à recouvrir et si possible partitionner le graphe I en sous graphes I_j appelés aussi briques. Si à chaque graphe I_j on associe un graphe virtuel H_j formé de $T_j = \frac{2R_j}{C+1}$ tubes qui regroupent les R_j requêtes de I_j, alors le graphe H formé de l'union des H_j est une solution du problème. De plus si les I_j partitionnent I, alors H est une solution minimale avec un nombre de tubes $T = \sum T_j$. Notons que si l'on recherche des solutions sous cette forme, le problème est un cas particulier de *Set Cover*, qui reste non ε-approximable même quand les ensembles sont les triangles d'un graphe [Kan91].

Cas $C = 2$

Dans ce cas la seule brique simple qui contienne $3/2$ requêtes par tube est le 3-tournoi transitif TT3. C'est à dire, dans ce cas particulier, il existe une solution de coût $\frac{2R}{3}$ si et seulement si I se décompose en 3-tournois. La figure ci-dessous illustre comment on peut obtenir le graphe H supportant le trafic de la figure 1 composé de deux 2-tournois.

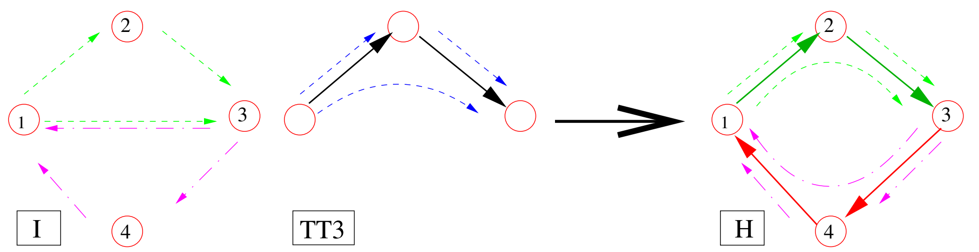

FIG. 4: Groupage pour $C = 2$ par recouvrement de I par le 3-tournoi $TT3$

Théorème 1 *: Pour $C = 2$, Le problème de groupage par tubes est dans MAX SNP .*

preuve : (idée) : On montre d'une part que décider si un graphe se décompose en $\frac{R}{3}$ 3-tournois ou au moins $(1+\varepsilon)\frac{R}{3}$ 3-tournois (ε est nombre positif fixé du style 0.0001) est un problème NP-complet, et d'autre part que l'on ne peut router un graphe de requêtes avec $\sim \frac{2R}{3}$ tubes que si le graphe se décompose en $\sim \frac{R}{3}$ tournois (voir [Riv02]). La preuve de décomposition en 3-tournois est obtenue en adaptant la démonstration de la NP-Completude du problème de partitionner les arêtes d'un graphe en triangle[Hol81]. Cependant un algorithme glouton de décomposition de I en 3-tournois est une $\frac{4}{3}$-approximation.

Dans le cas ou l'on a un trafic complet, c'est à dire K_n^*, on obtient en utilisant les résultats sur la décomposition de K_n^* en 3-tournois (voir [HM73, Ber75] appelés aussi Mendelsohn Triple Systems (voir la synthèse [DS92], chap.4) le théorème suivant :

Théorème 2 *: Si $C = 2$ il existe un groupage par tubes minimum ($T = \lceil \frac{2}{3}n(n-1) \rceil$) pour le trafic All-to-All K_n^* .*

preuve : Pour $n \neq 2 \mod [3]$ d'après [HM73] on peut partitionner les arcs de K_n^* en $T = \frac{n(n-1)}{3}$ 3-tournois. Pour $n = 2 \mod [3]$, il est possible de partitionner $K_n^* - e^*$ en 3-tournois en utilisant les résultats de [CC81] ; les deux arcs de e^* sont groupés dans deux tubes supplémentaires.

Cas $C = 3$

La figure ci dessous montre des briques élémentaires :

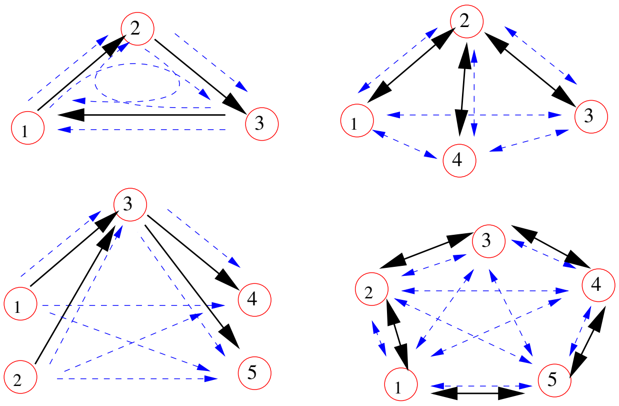

FIG. 5: $K_3^*, K_4^*, K_{2,1,2}$ et K_5^* : briques élémentaires pour $C = 3$

Propriété 1 *: Si $C = 3$, il existe un groupage par tubes atteignant la borne minimale ($T = \frac{1}{2}n(n-1)$) pour tout trafic All-to-All pour $n \neq 6$.*

preuve : Ceci résulte du fait que pour $n \notin \{6, 8\}$ on peut recouvrir n'importe quel graphe complet K_n avec des K_3, K_4 et K_5 et donc K_n^* avec les briques $K_3^*, K_4^* et K_5^*$ (voir [CD96]). Pour $n = 8$, il existe une couverture régulière du k_8^* par la brique $K_{2,1,2}$. Notons que pour $n = 6$, on a $T \in \{15, 16\}$.

4.1 Heuristiques

On peut certes étudier plus en avant pour le *All-to-All* les cas $C > 3$, lorsque $n \to \infty$. Pour tout $C \geq 3$, le complet K_{C+1}^* et le triparti orienté $K_{C-1,1,C-1}$ sont des briques élémentaires. En effet, l'étoile à C feuilles constitue une brique élémentaire optimale qui établit un *All-to-All* entre $C+1$ sommets utilisant $2C$ tubes. La théorie des designs affirme que si n satisfait alors des conditions triviales de nécessité K_n^* se décompose en de telles étoiles. On dispose donc de solutions optimales utilisant $\frac{2n(n-1)}{C+1}$ pour des familles infinies de valeurs de n grand. S'il est possible d'adapter les techniques de design au cas $C > 3$ afin de déterminer pour chaque n le coût exact, nous préférons donner ici une borne générale qui est issue d'une construction générique simple, et valable pour tout n. Notons que cette borne supérieure est de l'ordre de $\frac{2R}{C}$.

Théorème 3 *: Si $n = qC + r$ il existe un groupage utilisant T tubes avec $T = q(q-1)(2C-1) + 2q(C-1)$ si $r = 0$, et $T = q(q-1)(2C-1) + 2q(C-1) + 2q(C+r-1) + 2(r-1)$ si $r \neq 0$ pour le trafic All-to-All .*

Perspectives

Nous n'avons présenté ici que des bornes pour l'instance *All-to-All* ; nous cherchons désormais à résoudre le cas d'instances quelconques, en particulier dans le cas le plus simple : $C = 2$ où l'on sait seulement que le problème est MAX SNP, et qu'il existe une approximation en $\frac{4}{3}$ ([DF97]).

À l'opposé, le cas des C non bornés est encore moins bien cerné puisqu'il est intrinsèquement lié au problème de la recherche dans un graphe de sous graphes induits denses, question toujours ouverte ([FPK01]). Notons enfin que le cas C grand se distingue très clairement des cas C petits pour lesquels on peut pratiquement faire la liste des sous graphes candidats.

Références

[BCM03] J.-C. Bermond, D. Coudert, and X. Munoz. Traffic grooming in unidirectional WDM ring networks : the all-to-all unitary case. In *Proceedings of ONDM 2003, The 7th IFIP Working Conference on Optical Network Design and Modelling*, pages 1135–1155, 3-5 February 2003.

[Ber75] J-C. Bermond. Decomposition of K_n^* into k-circuits and balanced g-designs. In *Proceedings of Symp. in Recent advances in graph Theory, Prague*, pages 57–68, 1975.

[BMPP03] J.-C. Bermond, N. Marlin, D. Peleg, and S. Pérennes. Directed virtual path layout in ATM networks. *Theoretical Computer Science – Special Issue on DISC'98*, pages 3–28, 2003.

[CC81] M. J. Colbourn and C. J. Colbourn. Some small directed triple systems. In *Congr. Numer. 30*, pages 247–255, 1981.

[CD96] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, editors. *The CRC Handbook of Combinatorial Designs*. CRC Press London, 1996.

[Cho02] S. Choplin. *Dimensionnement de réseaux virtuels de télécommunications*. PhD thesis, Université de Nice–Sophia Antipolis, nov 2002.

[CM00] A. L. Chiu and E. H. Modiano. Traffic grooming algorithms for reducing electronic multiplexing costs in WDM ring networks. *Journal of Lightwave Technology*, 18(1) :2–12, January 2000.

[DF97] R.-C Duh and M. Fürer. approximation of k-set cover by semi-local optimization. In *Proceedings of STOC 97, El Paso Texas*, pages 256–264, 1997.

[DR02] R. Dutta and G. N. Rouskas. Traffic grooming in WDM networks : Past and future. *IEEE Network*, 16(6) :46–56, November/December 2002.

[DS92] J. H. Dinitz and D. R. Stinson, editors. *Contemporary Design Theory : A Collection of Surveys*. John Wiley & Sons, New York, 1992.

[FPK01] Uriel Feige, David Peleg, and Guy Kortsarz. The dense k -subgraph problem. *Algorithmica*, 29(3) :410–421, 2001.

[HM73] S.H.Y Hung and N.S. Mendelsohn. Directed triple systems. *J. combinatorial theory A*, 14 :310–318, 1973.

[Hol81] Ian Holyer. The NP-Completness of some edge-partition problems. In *SIAM J. COMPUT*, volume 10, no 4, pages 713–717, nov 1981.

[HPS02] G. Huiban, S. Pérennes, and M. Syska. Traffic grooming in WDM networks with multi-layer switches. In *IEEE ICCS, New York*, New-York, apr 2002.

[Kan91] V. Kann. Maximum bounded 3-dimensional matching is max snp-complete. *Inform. Process. Lett.*, 37 :27–35, 1991.

[Riv02] O. De Rivoyre. Le groupage par tubes. ESSI - Université de Nice, Stage de fin d'études, 2002.

[Zak98] S. Zaks. Path layout in atm networks - a survey 1998. In M. Mavronicolas, M. Merritt, , and N. Shavit, editors, *Networks in Distributed Computing, DIMACS : Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science.*, pages 145–160., 1998.