

N° D'ANONYMAT:



ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025
SESSION 2 DE PRINTEMPS

Parcours/Étape: L3 Info./MI/CMI **Code UE:** 4TIN602U

Épreuve: Techniques Algorithmiques et Programmation

Date: 23/06/2024 **Heure:** 11h30 **Durée:** 1h30

Documents: une seule feuille A4 recto-verso autorisée.

Épreuve de M. Cyril GAVOILLE

université
de **BORDEAUX**

**Collège Sciences
et Technologie**

RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE SUJET
QUI EST À RENDRE DANS LA FEUILLE DOUBLE D'EXAMEN

Question de cours

Question 1. *Tout en justifiant, donnez le nombre d'arêtes m des graphes suivants, exprimé en fonction du nombre de sommets n (une réponse par cadre) :*

- 1. un arbre binaire*
- 2. un arbre binaire complet*
- 3. un graphe complet*

--

--

--

Question 2. *Rappelez les définitions des objets suivants (une réponse par cadre) :*

1. *tas minimum*
2. *arbre de plus court chemins*
3. *arbre de poids minimum*

Question 3. *Ordonnez de manière croissante les 8 complexités asymptotiques suivantes :*

$$n, \quad 3^n/n, \quad n/\ln(n), \quad e^n, \quad 2^{\sqrt{\ln(n)}}, \quad n/\sqrt{\ln(n)}, \quad \sqrt{n}, \quad 2^n$$

Vous pourrez écrire $f(n) \prec g(n)$ pour dire que la complexité $f(n)$ est asymptotiquement plus petite que la complexité $g(n)$.

Mine d'or

Un mineur souhaite extraire le meilleur filon d'une mine d'or. Une étude précise du terrain a permis de mesurer la quantité d'or disponible en kg dans chaque bloc de la mine, les blocs étant répartis en couches linéaires niveau par niveau. Le résultat est donné sous la forme d'une matrice M rectangulaire $H \times L$, où $M(i, j)$ indique la quantité d'or disponible à la profondeur $i \in \{0, \dots, H - 1\}$ et à la position $j \in \{0, \dots, L - 1\}$. On supposera $H, L \geq 1$.

Pour simplifier, on identifiera la mine avec sa matrice de mesures. Voici un exemple M_0 de mine 5×3 .

$$M_0 = \begin{array}{ccc|c} & j = 0 & j = 1 & j = 2 & \\ \hline & 2 & 3 & \mathbf{6} & i = 0 \\ \hline & 8 & \mathbf{6} & 1 & i = 1 \\ \hline & 7 & \mathbf{8} & 5 & i = 2 \\ \hline & \mathbf{3} & 1 & 2 & i = 3 \\ \hline & 0 & \mathbf{1} & 1 & i = 4 \end{array}$$

Le processus d'extraction d'un filon d'or dans M est le suivant. Le niveau $i = 0$ correspond à la surface de la mine et est immédiatement accessible au mineur. Le mineur est donc libre de choisir la position initiale comme il le souhaite. Une fois cette position j choisie, il creuse le bloc pour récupérer la quantité $M(i, j)$ d'or qui s'y trouve. De là, il peut accéder à l'un des blocs de niveau $i + 1$ qui est soit juste en dessous, juste avant ou juste après la position j . Dit autrement, une fois le bloc (i, j) extrait, il peut extraire l'un des blocs $(i + 1, j - 1)$, $(i + 1, j)$ ou $(i + 1, j + 1)$. Il continue ainsi de suite jusqu'à atteindre le fond de la mine. Un filon peut être vu comme un chemin de blocs reliant la première à la dernière ligne, qui ne fait que descendre avec des mouvements latéraux de -1 , 0 ou $+1$.

Le but du mineur est d'extraire le meilleur filon de M , c'est-à-dire celui contenant la quantité maximum d'or. Pour M_0 , le meilleur filon contient $6 + 6 + 8 + 3 + 1 = 24$ kg d'or et est composé des blocs $(0, 2) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (4, 1)$.

Pour un bloc (i, j) d'une mine M donnée, on définit $f(i, j)$ comme la quantité d'or du meilleur filon à partir du bloc (i, j) . On a vu pour M_0 que $f(0, 2) = 24$. On a aussi $f(1, 1) = 6 + 8 + 3 + 1 = 18$ et $f(2, 2) = 5 + 2 + 1 = 8$.

Question 4. Pour la mine M_0 , déterminez $f(1, 0)$, $f(0, 0)$, $f(0, 1)$, en précisant les calculs.

Il est clair que le meilleur filon consiste à choisir une position initiale j telle que $f(0, j)$ est maximum. Autrement dit, la quantité d'or $Q(M)$ du meilleur filon vaut précisément

$$Q(M) = \max_{j \in \{0, \dots, L-1\}} f(0, j)$$

Grâce à la question 4, vous pouvez vérifier en effet que $Q(M_0) = \max \{f(0, 0), f(0, 1), f(0, 2)\} = 24$.

Question 5. *Pour une mine M quelconque, déterminez une formule de récurrence permettant de calculer $f(i, j)$. [Pour simplifier, posez $f(i, j) = 0$ si $i \notin \{0, \dots, H-1\}$ ou $j \notin \{0, \dots, L-1\}$.]*

Question 6. *Dessinez l'arbre des appels de $f(1, 1)$ pour la mine M_0 . Calculez le nombre de nœuds et le nombre d'appels différents de cet arbre. Pour simplifier, vous pourrez représenter l'appels (i, j) par " ij ". [Aide : Représentez uniquement les appels valides, c'est-à-dire avec $i \in [0, H[$ et $j \in [0, L[$.]*

Question 7. De manière générale, en fonction de H et L , donnez un majorant pour le nombre de nœuds de l'arbre des appels de $f(0, j)$ pour une position j quelconque. Justifiez.

Question 8. En déduire la complexité du calcul de la quantité d'or du meilleur filon $Q(M)$ en utilisant le calcul récursif de $f(i, j)$.

Il est facile de voir qu'avec cette méthode récursive pour $Q(M)$ il existe des calculs inutiles. Par exemple, le calcul de $f(0, 0)$ utilise $f(1, 0)$ et $f(1, 1)$, mais le calcul de $f(0, 1)$ utilise aussi ces deux valeurs. On se propose donc d'employer la programmation dynamique. Pour cela, on va utiliser un tableau `double F[H][L]`; où $F[i][j] = f(i, j)$ tout simplement.

Question 9. Donnez le tableau F rempli pour la mine M_0 . [Aide : La dernière ligne est facile à construire et vous devriez avoir $F[0][2] = 24$.]

Question 10. En supposant que H et L sont des variables globales, écrivez la partie manquante du code ci-dessous censé calculer par programmation dynamique $Q(M)$ pour une mine M quelconque. [Aide : Faites attention aux bords de la mine et au cas $L = 1$.]

```
int const H,L;
double Q(double M[H][L]){
    double F[H][L];

    ...; // partie à compléter dans le cadre ci-dessous

    int q=0;
    for(int j=0; j<L; j++) q = fmax(q, F[0][j]);
    return q;
}
```

Question 11. Quelle est la complexité de $Q(M)$ en fonction des dimensions de M ? Justifiez.

FIN.