



ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025
SESSION 2 DE PRINTEMPS

Parcours/Étape: L3 Info./MI/CMI Code UE: 4TIN602U

Épreuve: Techniques Algorithmiques et Programmation

Date: 23/06/2024

Heure: 11h30

Durée: 1h30

Documents: une seule feuille A4 recto-verso autorisée.

Épreuve de M. Cyril GAVOILLE

université
de BORDEAUX

Collège Sciences
et Technologie

RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE SUJET
QUI EST À RENDRE DANS LA FEUILLE DOUBLE D'EXAMEN

Question de cours

Question 1. *Tout en justifiant, donnez le nombre d'arêtes m des graphes suivants, exprimé en fonction du nombre de sommets n (une réponse par cadre) :*

1. un arbre binaire
2. un arbre binaire complet
3. un graphe complet

SOLUTION. [6 pts | $\sum 6.0$]

1. un arbre binaire : c'est $m = n - 1$ comme tout arbre à n sommets. En effet, dans chaque arbre on peut choisir un sommet comme racine si bien que chaque sommet possède exactement un parent, sauf la racine, ce qui fait $n - 1$ arêtes.
2. un arbre binaire complet : c'est $m = n - 1$ puisque c'est aussi un arbre.
3. un graphe complet : c'est $m = n(n - 1)/2$ en sommant les degrés des sommets (tous égal à $n - 1$) et en divisant par deux, la somme donnant le double du nombre d'arêtes.

Question 2. *Rappelez les définitions des objets suivants (une réponse par cadre) :*

1. tas minimum
2. arbre de plus court chemins
3. arbre de poids minimum

SOLUTION. [6 pts | $\sum 12.0$]

1. tas minimum : il s'agit d'une structure de donnée organiser sous la forme d'un arbre binaire et complet sauf le dernier niveau qui est complet à gauche. La valeur d'un nœud doit être plus petite que toutes celles de ses nœuds descendants.
2. arbre de plus court chemins : dans un graphe valué (G, ω) , il s'agit d'un arbre couvrant T de racine un certain sommet s tel que le coût du chemin dans T de n'importe quel sommet u à s corresponde à la distance de u à s dans G . est minimum.
3. arbre de poids minimum : dans un graphe valué (G, ω) , il s'agit d'un arbre couvrant T dont le poids (la somme des coûts de ses arêtes) soit la plus petite possible.

Question 3. Ordonnez de manière croissante les 8 complexités asymptotiques suivantes :

$$n, \quad 3^n/n, \quad n/\ln(n), \quad e^n, \quad 2\sqrt{\ln(n)}, \quad n/\sqrt{\ln(n)}, \quad \sqrt{n}, \quad 2^n$$

Vous pourrez écrire $f(n) \prec g(n)$ pour dire que la complexité $f(n)$ est asymptotiquement plus petite que la complexité $g(n)$.

SOLUTION. [4 pts | $\sum 16.0$]

$$2\sqrt{\ln(n)} \prec \sqrt{n} \prec n/\sqrt{\ln(n)} \prec n/\ln(n) \prec n \prec 2^n \prec e^n \prec 3^n/n$$

Il fallait savoir que $2 < e \approx 2.71 < 3$. En cas de difficulté, par exemple pour comparer $2\sqrt{\ln(n)}$ et n , il faut comparer leur logarithme (qui est une fonction croissante, donc qui préserve l'ordre). Dans ce cas, en prenant le logarithme en base deux, on obtient : $\sqrt{\ln n}$ vs. $\log_2 n = \ln n / \ln 2$. L'ordre est donc $2\sqrt{\ln(n)} \prec n$.

Pour la notation, je compte les inégalités consécutives correctes (7 au maximum) moins $\lfloor 7/2 \rfloor = 3$ points.

Mine d'or

Un mineur souhaite extraire le meilleur filon d'une mine d'or. Une étude précise du terrain a permis de mesurer la quantité d'or disponible en kg dans chaque bloc de la mine, les blocs étant répartis en couches linéaires niveau par niveau. Le résultat est donné sous la forme d'une matrice M rectangulaire $H \times L$, où $M(i, j)$ indique la quantité d'or disponible à la profondeur $i \in \{0, \dots, H - 1\}$ et à la position $j \in \{0, \dots, L - 1\}$. On supposera $H, L \geq 1$.

Pour simplifier, on identifiera la mine avec sa matrice de mesures. Voici un exemple M_0 de mine 5×3 .

$$M_0 = \begin{array}{ccc|c} & j = 0 & j = 1 & j = 2 & \\ \hline & 2 & 3 & \mathbf{6} & i = 0 \\ \hline & 8 & \mathbf{6} & 1 & i = 1 \\ \hline & 7 & \mathbf{8} & 5 & i = 2 \\ \hline & \mathbf{3} & 1 & 2 & i = 3 \\ \hline & 0 & \mathbf{1} & 1 & i = 4 \end{array}$$

Le processus d'extraction d'un filon d'or dans M est le suivant. Le niveau $i = 0$ correspond à la surface de la mine et est immédiatement accessible au mineur. Le mineur est donc libre de choisir la position initiale comme il le souhaite. Une fois cette position j choisie, il creuse le bloc pour récupérer la quantité $M(i, j)$ d'or qui s'y trouve. De là, il peut accéder à l'un des blocs de niveau $i + 1$ qui est soit juste en dessous, juste avant ou juste après la position j . Dit autrement, une fois le bloc (i, j) extrait, il peut extraire l'un des blocs $(i + 1, j - 1)$, $(i + 1, j)$ ou $(i + 1, j + 1)$. Il continue ainsi de suite jusqu'à atteindre le fond de la mine. Un filon peut être vu comme un chemin de blocs reliant la première à la dernière ligne, qui ne fait que descendre avec des mouvements latéraux de -1 , 0 ou $+1$.

Le but du mineur est d'extraire le meilleur filon de M , c'est-à-dire celui contenant la quantité maximum d'or. Pour M_0 , le meilleur filon contient $6 + 6 + 8 + 3 + 1 = 24$ kg d'or et est composé des blocs $(0, 2) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (4, 1)$.

Pour un bloc (i, j) d'une mine M donnée, on définit $f(i, j)$ comme la quantité d'or du meilleur filon à partir du bloc (i, j) . On a vu pour M_0 que $f(0, 2) = 24$. On a aussi $f(1, 1) = 6 + 8 + 3 + 1 = 18$ et $f(2, 2) = 5 + 2 + 1 = 8$.

Question 4. Pour la mine M_0 , déterminez $f(1, 0)$, $f(0, 0)$, $f(0, 1)$, en précisant les calculs.

SOLUTION. [3 pts | $\sum 19.0$]

- $f(1, 0) = 8 + 8 + 3 + 1 = 20$
- $f(0, 0) = 2 + 8 + 8 + 3 + 1 = 22$
- $f(0, 1) = 3 + 8 + 8 + 3 + 1 = 23$

Il est clair que le meilleur filon consiste à choisir une position initiale j telle que $f(0, j)$ est maximum. Autrement dit, la quantité d'or $Q(M)$ du meilleur filon vaut précisément

$$Q(M) = \max_{j \in \{0, \dots, L-1\}} f(0, j)$$

Grâce à la question 4, vous pouvez vérifier en effet que $Q(M_0) = \max \{f(0, 0), f(0, 1), f(0, 2)\} = 24$.

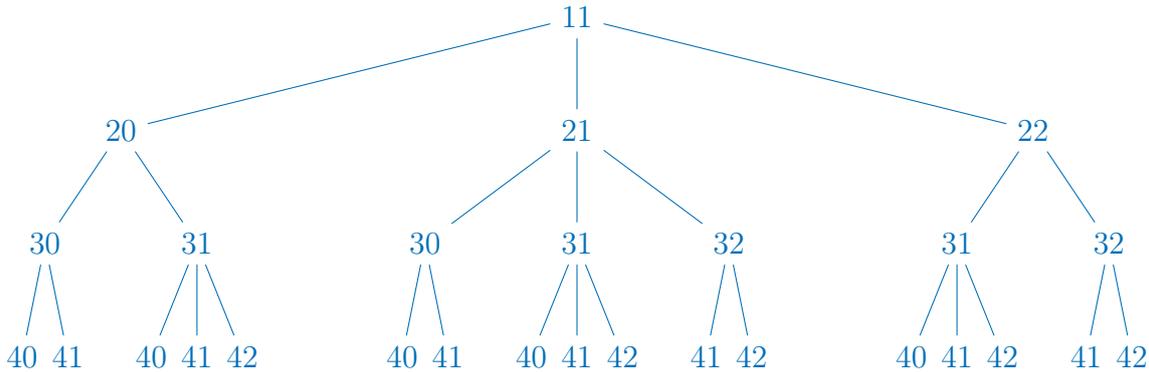
Question 5. Pour une mine M quelconque, déterminez une formule de récurrence permettant de calculer $f(i, j)$. [Pour simplifier, posez $f(i, j) = 0$ si $i \notin \{0, \dots, H-1\}$ ou $j \notin \{0, \dots, L-1\}$.]

SOLUTION. [3 pts | $\sum 22.0$]

$$f(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin [0, H[\text{ ou } j \notin [0, L[\\ M(i, j) + \max \{f(i+1, j-1), f(i+1, j), f(i+1, j+1)\} & \text{si } i \in [0, H[\text{ et } j \in [0, L[\end{cases}$$

Question 6. Dessinez l'arbre des appels de $f(1, 1)$ pour la mine M_0 . Calculez le nombre de nœuds et le nombre d'appels différents de cet arbre. Pour simplifier, vous pourrez représenter l'appels (i, j) par " ij ". [Aide : Représentez uniquement les appels valides, c'est-à-dire avec $i \in [0, H[$ et $j \in [0, L[$.]

SOLUTION. [3 pts | $\sum 25.0$] Voici l'arbre pour $f(1, 1)$:



Le nombre de nœuds pour $f(1, 1)$, c'est-à-dire le nombre de sommets, est, par niveau croissant, de 1, 3, 7, 17. Cela fait un total de 35 nœuds. Le nombre d'appels différents dans l'arbre est moindre. Il y a 10 appels différents : 11, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 40, 41, 42.

Question 7. De manière générale, en fonction de H et L , donnez un majorant pour le nombre de nœuds de l'arbre des appels de $f(0, j)$ pour une position j quelconque. Justifiez.

SOLUTION. [3 pts | $\sum 28.0$] Le nombre de nœuds au niveau i est au plus 3^i , puisque chaque nœud a au plus 3 fils (cela peut être 2 pour les bords et même 1 seul si $L = 1$). Au total, il y a donc au plus $\sum_{i=0}^{H-1} 3^i = (3^H - 1)/2$. À cause des bords, il y en a moins de sommets, mais on demandait un majorant et une justification. NB : Si $L = 1$, il y en a que $O(H)$ nœuds.

Question 8. En déduire la complexité du calcul de la quantité d'or du meilleur filon $Q(M)$ en utilisant le calcul récursif de $f(i, j)$.

SOLUTION. [3 pts | $\sum 31.0$] D'après la question 7, c'est au plus $O(L \cdot 3^H)$, puisqu'on doit calculer $f(0, j)$ pour chaque $j \in \{0, \dots, L\}$.

Il est facile de voir qu'avec cette méthode récursive pour $Q(M)$ il existe des calculs inutiles. Par exemple, le calcul de $f(0, 0)$ utilise $f(1, 0)$ et $f(1, 1)$, mais le calcul de $f(0, 1)$ utilise aussi ces deux

valeurs. On se propose donc d'employer la programmation dynamique. Pour cela, on va utiliser un tableau `double F[H][L]`; où $F[i][j] = f(i, j)$ tout simplement.

Question 9. *Donnez le tableau F rempli pour la mine M_0 . [Aide : La dernière ligne est facile à construire et vous devriez avoir $F[0][2] = 24$.]*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 34.0$] La table complète est celle-ci, que l'on remplit facilement de la dernière ligne à la première, chaque case étant le maximum de deux ou trois cases juste en dessous :

	0	1	2	
F =	22	23	24	0
	20	18	13	1
	11	12	8	2
	4	2	3	3
	0	1	1	4

Question 10. *En supposant que H et L sont des variables globales, écrivez la partie manquante du code ci-dessous censé calculer par programmation dynamique $Q(M)$ pour une mine M quelconque. [Aide : Faites attention aux bords de la mine et au cas $L = 1$.]*

```
int const H,L;
double Q(double M[H][L]){
    double F[H][L];

    ...; // partie à compléter dans le cadre ci-dessous

    int q=0;
    for(int j=0; j<L; j++) q = fmax(q, F[0][j]);
    return q;
}
```

SOLUTION. [3 pts | $\sum 37.0$]

```
for(int j=0; j<L; j++) F[H-1][j] = M[i][j]; // dernière ligne
double pred,mid,succ; // bloc à gauche, en dessous, à droit
for(int i=H-2; i>=0; i--) // en montant depuis l'avant dernière ligne
    for(int j=0; j<L; j++){
        mid = pred = succ = F[i+1][j]; // bloc en dessous par défaut
        if(j>0) pred = F[i+1][j-1]; // bloc à gauche existe
        if(j<L-1) succ = F[i+1][j+1]; // bloc à droit existe
        F[i][j] = M[i][j] + fmax(pred,fmax(mid,succ));
    }
```

Question 11. *Quelle est la complexité de $Q(M)$ en fonction des dimensions de M ? Justifiez.*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 40.0$] Sa complexité est $O(H \cdot L)$ à cause des deux boucles `for` imbriquées, la première et dernière boucle étant négligeables car en $O(L)$.

FIN.