

N° D'ANONYMAT:



ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024
SESSION 2 DE PRINTEMPS

Parcours/Étape: L3 Info./MI/CMI **Code UE:** 4TIN602U

Épreuve: Techniques Algorithmiques et Programmation

Date: 17/06/2024 **Heure:** 11h30 **Durée:** 1h30

Documents: une seule feuille A4 recto-verso autorisée.

Épreuve de M. Cyril GAVOILLE

université
de **BORDEAUX**

**Collège Sciences
et Technologie**

RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE SUJET
QUI EST À RENDRE DANS LA FEUILLE DOUBLE D'EXAMEN

Question de cours

Question 1. *Expliquez précisément ce qu'est un « problème » en algorithmique. Puis, donnez un exemple de tel problème.*

Question 2. *Que signifie l'expression « l'algorithme A est de complexité polynomiale ».*

Question 3. Un étudiant écrit que le nombre $p(n)$ de paires d'entiers $\{i, j\}$, où i et j sont des entiers de $\{1, \dots, n\}$, vaut $p(n) = \binom{n}{2} = O(n^2/2)$. Qu'aurait-il du écrire pour avoir la note maximale et pourquoi ?

Voyageur de commerce

Soit V un ensemble non vide de points du plan, et d la distance euclidienne.

Question 4. Rappelez la formule donnant $d(A, B)$ pour deux points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ de V .

Question 5. Montrez que si tous les points de V appartiennent à un cercle, alors la tournée optimale du VOYAGEUR DE COMMERCE pour (V, d) peut être obtenue en visitant les points dans l'ordre cyclique d'apparition sur le cercle.

On suppose maintenant que $V = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$.

Question 6. Démontrez que les points de V appartiennent au cercle unité, c'est-à-dire le cercle de centre l'origine $O = (0, 0)$ et de rayon 1.

Question 7. *En remarquant que les points de V sont répartis uniformément sur le cercle unité, c'est-à-dire qu'ils sont à égale distance lorsqu'ils sont pris consécutivement le long du cercle, calculez la longueur de la tournée optimale pour (V, d) .*

On suppose maintenant que V possède n points appartenant à un demi-cercle unité, c'est-à-dire que tous les points de V appartiennent à un cercle de rayon 1 et que l'angle en radian formé entre deux points quelconques de V , par rapport au centre du cercle, est au plus π .

Question 8. *Donnez dans ce cas un majorant, le plus petit possible, sur la tournée optimale de (V, d) . Ce majorant peut-il être atteint ? Justifiez. [Aide : On rappelle que le périmètre d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$.]*

On rappelle le principe de l'algorithme **ApproxMST** vu en cours.

Algorithme **ApproxMST**(V, d)

Entrée : Une instance (V, d) du VOYAGEUR DE COMMERCE.

Sortie : Une tournée, c'est-à-dire un ordre sur les points de V .

1. Calculer un arbre couvrant de poids minimum T sur le graphe complet défini par V et les arêtes valuées par d .
 2. La tournée est définie par l'ordre de première visite des sommets selon un DFS de T , c'est-à-dire un parcours en profondeur d'abord.
-

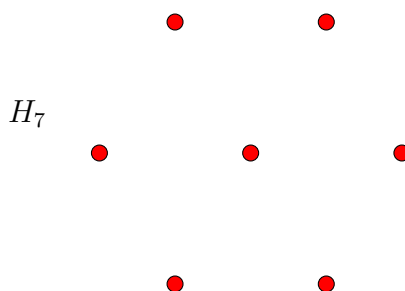
Question 9. *Rappelez la définition d'un arbre couvrant de poids minimum.*

Question 10. *Donnez, en fonction de $|V|$, le nombre d'arêtes du graphe complet à l'étape 1.*

On a vu dans le cours que l'algorithme `ApproxMST` est une 2-approximation.

Question 11. *Qu'est-ce qu'une 2-approximation pour le VOYAGEUR DE COMMERCE ?*

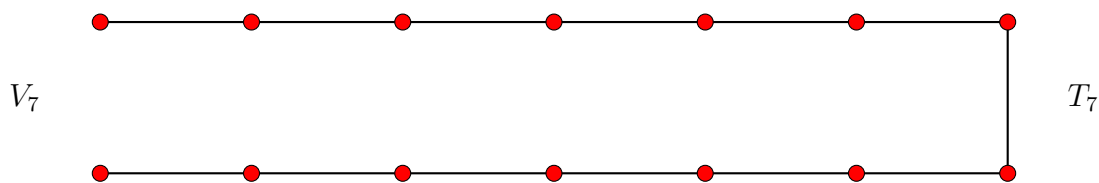
On considère H_7 comme l'ensemble des 7 points constitué des sommets d'un hexagone régulier de côté 1 ainsi que son centre. On rappelle que la distance entre le centre et chaque sommet de l'hexagone vaut également 1. Ceci permet de décomposer l'hexagone en 6 triangles équilatéraux. On rappelle aussi que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 vaut $\sqrt{3}/2 \approx 0.8$.



Question 12. *Quelle est la longueur de la tournée optimale pour (H_7, d) ? Justifiez.*

Question 13. *Montrer qu'ApproxMST appliqué à (H_7, d) peut produire un facteur d'approximation ≈ 1.6 , avec un DFS particulier de l'arbre T . Dessinez la tournée sur H_7 en précisant l'arbre T et son parcours avec le point de départ. [Aide : $11.2/7 = 1.6$.]*

L'objectif est de montrer que le facteur d'approximation d'ApproxMST peut se rapprocher arbitrairement près de 2. Pour cela, on considère V_n comme l'ensemble des points d'une grille $2 \times n$, où deux points consécutifs sur le bord de V_n sont à distance 1. Soit T_n l'arbre couvrant V_n , en fait le chemin, constitué des points du bord de V_n . Voir l'exemple ci-dessous pour $n = 7$.




Notez bien que l'ensemble V_7 est composé seulement des 14 points rouges, alors que le graphe T_7 est composé de V_7 ainsi que des 13 arêtes noires reliant certains points de V_7 .

Question 14. *Quelle est la longueur de la tournée optimale pour (V_n, d) ? Justifiez.*

Question 15. *Montrez que T_n est bien un arbre couvrant de poids minimum et donnez son poids.*

Question 16. *Montrez qu'il existe un sommet de T_n où tout DFS depuis ce sommet produit une tournée de longueur optimale.*

Question 17. Montrez qu'il existe un DFS de T_7 où la tournée résultante est de longueur strictement comprise entre 24 et 26. Précisez le premier sommet et le parcours, par exemple en les dessinant. [Aide : Vous pourrez utiliser le fait que $x < \sqrt{x^2 + 1} < x + 1$ pour tout réel $x > 0$.]



Question 18. Quel est dans ce cas le facteur d'approximation ? (dans les conditions de la question 17, c'est-à-dire avec le DFS particulier de T_7). Donnez un encadrement.



Question 19. En généralisant les questions 17 et 18 à tout entier $n > 7$, montrez que le facteur d'approximation d'ApproxMST pour (V_n, d) vaut $2 - O(1/n)$.



FIN.