



ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024
SESSION 2 DE PRINTEMPS

Parcours/Étape: L3 Info./MI/CMI **Code UE:** 4TIN602U
Épreuve: Techniques Algorithmiques et Programmation
Date: 17/06/2024 **Heure:** 11h30 **Durée:** 1h30
Documents: une seule feuille A4 recto-verso autorisée.
Épreuve de M. Cyril GAVOILLE

université
de **BORDEAUX**

**Collège Sciences
et Technologie**

RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE SUJET
QUI EST À RENDRE DANS LA FEUILLE DOUBLE D'EXAMEN

Question de cours

Question 1. Expliquez précisément ce qu'est un « problème » en algorithmique. Puis, donnez un exemple de tel problème.

SOLUTION. [3 pts | $\sum 3.0$] D'après le cours, il s'agit de la description des instances et des sorties attendues en fonction de chaque instance. C'est donc la description d'une relation entre les entrées et les sorties attendues. Le VOYAGEUR DE COMMERCE est un tel problème, les entrées sont un ensemble de points et une distance, et la sortie un ordre de visite des points minimisant la distance totale.

Question 2. Que signifie l'expression « l'algorithme A est de complexité polynomiale ».

SOLUTION. [3 pts | $\sum 6.0$] Cela signifie que la complexité en temps est au plus en $O(n^c)$ où n est la taille de l'entrées et c une constante positive.

Question 3. Un étudiant écrit que le nombre $p(n)$ de paires d'entiers $\{i, j\}$, où i et j sont des entiers de $\{1, \dots, n\}$, vaut $p(n) = \binom{n}{2} = O(n^2/2)$. Qu'aurait-il du écrire pour avoir la note maximale et pourquoi ?

SOLUTION. [3 pts | $\sum 9.0$] La réponse aurait du être $p(n) = \binom{n}{2} = O(n^2)$ ou encore $p(n) = \Theta(n^2)$. La notation asymptotique $O(n^2/2)$ n'est pas fausse, mais pas simplifiée. Or, c'est précisément le but de la notation asymptotique. Sinon, pourquoi ne pas écrire $p(n) = O(n^{1+1} + 1/2 - \pi)$.

Voyageur de commerce

Soit V un ensemble non vide de points du plan, et d la distance euclidienne.

Question 4. Rappelez la formule donnant $d(A, B)$ pour deux points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ de V .

SOLUTION. [3 pts | $\sum 12.0$] $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Question 5. Montrez que si tous les points de V appartiennent à un cercle, alors la tournée optimale du VOYAGEUR DE COMMERCE pour (V, d) peut être obtenue en visitant les points dans l'ordre cyclique d'apparition sur le cercle.

SOLUTION. [3 pts | $\sum 15.0$] C'est bien le cas s'il y a trois points ou moins. À partir de quatre points, le parcours non circulaire des points implique un croisement, et donc que la tournée n'est pas optimale. Ainsi, la tournée optimale doit être dans l'ordre cyclique d'apparition des points sur le cercle.

On suppose maintenant que $V = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$.

Question 6. *Démontrez que les points de V appartiennent au cercle unité, c'est-à-dire le cercle de centre l'origine $O = (0, 0)$ et de rayon 1.*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 18.0$] Il suffit de montrer que $d(p, O) = 1$ pour chaque point $p \in V$. On le vérifie facilement, car pour chaque point $(x, y) \in V$, on a $d((x, y), O) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2} = 1$.

Question 7. *En remarquant que les points de V sont répartis uniformément sur le cercle unité, c'est-à-dire qu'ils sont à égale distance lorsqu'ils sont pris consécutivement le long du cercle, calculez la longueur de la tournée optimale pour (V, d) .*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 21.0$] D'après la remarque et la question 5, la tournée optimale est de longueur $4d(p, q)$ avec $p = (1, 0)$ et $q = (0, 1)$ sont deux points consécutifs sur le cercle unité. On a $d(p, q) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$, et donc $\text{OPT}(V, d) = 4\sqrt{2}$.

On suppose maintenant que V possède n points appartenant à un demi-cercle unité, c'est-à-dire que tous les points de V appartiennent à un cercle de rayon 1 et que l'angle en radian formé entre deux points quelconques de V , par rapport au centre du cercle, est au plus π .

Question 8. *Donnez dans ce cas un majorant, le plus petit possible, sur la tournée optimale de (V, d) . Ce majorant peut-il être atteint ? Justifiez. [Aide : On rappelle que le périmètre d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$.]*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 24.0$] La longueur de la tournée est au plus le périmètre du demi-cercle unité plus le trajet retour entre deux points de V , ce qui donne $\text{OPT}(V, d) < \pi + 2$. Le majorant de $\pi + 2$ ne peut être atteint car la distance entre deux points distincts, aussi proches qu'ils peuvent l'être, est strictement inférieure à l'arc de cercle les séparant.

On rappelle le principe de l'algorithme ApproxMST vu en cours.

Algorithmes ApproxMST(V, d)

Entrée : Une instance (V, d) du VOYAGEUR DE COMMERCE.

Sortie : Une tournée, c'est-à-dire un ordre sur les points de V .

1. Calculer un arbre couvrant de poids minimum T sur le graphe complet défini par V et les arêtes valuées par d .
2. La tournée est définie par l'ordre de première visite des sommets selon un DFS de T , c'est-à-dire un parcours en profondeur d'abord.

Question 9. *Rappelez la définition d'un arbre couvrant de poids minimum.*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 27.0$] Il s'agit d'un arbre dont les arêtes couvrent tous les points de V et tel que la somme des poids des arêtes est la plus petite possible.

Question 10. *Donnez, en fonction de $|V|$, le nombre d'arêtes du graphe complet à l'étape 1.*

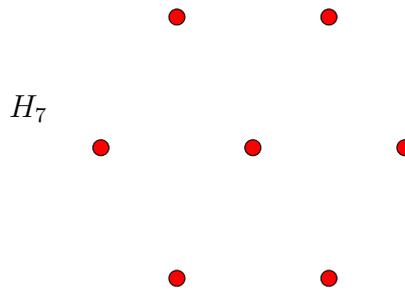
SOLUTION. [3 pts | $\sum 30.0$] C'est $\binom{|V|}{2} = |V|(|V| - 1)/2$.

On a vu dans le cours que l'algorithme ApproxMST est une 2-approximation.

Question 11. *Qu'est-ce qu'une 2-approximation pour le VOYAGEUR DE COMMERCE ?*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 33.0$] C'est un algorithme polynomial qui produit une tournée de longueur au plus deux fois plus que l'optimale.

On considère H_7 comme l'ensemble des 7 points constitué des sommets d'un hexagone régulier de coté 1 ainsi que son centre. On rappelle que la distance entre le centre et chaque sommet de l'hexagone vaut également 1. Ceci permet de décomposer l'hexagone en 6 triangles équilatéraux. On rappelle aussi que la hauteur d'un triangle équilatéral de coté 1 vaut $\sqrt{3}/2 \approx 0.8$.



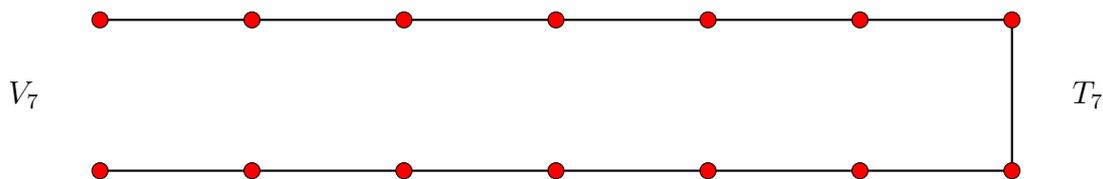
Question 12. *Quelle est la longueur de la tournée optimale pour (H_7, d) ? Justifiez.*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 36.0$] La tournée optimale est le longueur 7. En effet, on ne peut pas faire moins car il y a 7 points à couvrir et la distance entre deux points est au moins 1. Donc, tout cycle passant par tous les points est donc de longueur au moins 7.

Question 13. *Montrer qu'ApproxMST appliqué à (H_7, d) peut produire un facteur d'approximation ≈ 1.6 , avec un DFS particulier de l'arbre T . Dessinez la tournée sur H_7 en précisant l'arbre T et son parcours avec le point de départ. [Aide : $11.2/7 = 1.6$.]*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 39.0$] L'arbre est une étoile. Le centre (v_0) est le point de départ. La tournée est alors (indices) : $0 - 1 - 4 - 2 - 5 - 3 - 6 - 0$, soit une longueur de $1 + 2 + 2h + 2 + 2h + 2 + 1 = 8 + 4h$ avec $h = \sqrt{3}/2$, la hauteur d'un triangle équilatéral. D'après la question 12, le ratio est donc au moins $(8 + 4h)/7 = (8 + 3.2)/7 = 1.6$.

L'objectif est de montrer que le facteur d'approximation d'ApproxMST peut se rapprocher arbitrairement près de 2. Pour cela, on considère V_n comme l'ensemble des points d'une grille $2 \times n$, où deux points consécutifs sur le bord de V_n sont à distance 1. Soit T_n l'arbre couvrant V_n , en fait le chemin, constitué des points du bord de V_n . Voir l'exemple ci-dessous pour $n = 7$.



Notez bien que l'ensemble V_7 est composé seulement des 14 points rouges, alors que le graphe T_7 est composé de V_7 ainsi que des 13 arêtes noires reliant certains points de V_7 .

Question 14. *Quelle est la longueur de la tournée optimale pour (V_n, d) ? Justifiez.*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 42.0$] La tournée optimale est le longueur $2n$. En effet, on ne peut pas faire moins car V_n possède $2n$ points et la distance entre deux points quelconques est au moins 1. Toute tournée passant par tous les points est donc de longueur au moins $2n$. On remarque aussi que V_n est convexe.

Question 15. *Montrez que T_n est bien un arbre couvrant de poids minimum et donnez son poids.*

SOLUTION. [3 pts | $\sum 45.0$] T_n est un arbre couvrant V_n . Donc, il possède $|E(T_n)| = |V(V_n)| - 1 = 2n - 1$ arêtes. Chaque arête du bord a un poids de 1. Son poids est donc $2n - 1$.

Question 16. *Montrez qu'il existe un sommet de T_n où tout DFS depuis ce sommet produit une tournée de longueur optimale.*

SOLUTION. [3 pts | \sum 48.0] Remarque importante. Il existe plusieurs parcours DFS pour un même arbre (par exemple en choisissant une racine plutôt qu'une autre, ou en partant dans une branche plutôt qu'une autre). En particulier, l'étape 2 de l'algorithme **ApproxMST** peut produire potentiellement plusieurs tournées puisqu'elle choisit "un DFS de T " parmi les possibles pour T .

Prendre une des feuilles de T_n . Il n'y a qu'un seul parcours possible (car T_n est un arbre) qui donne une longueur de $2n$, ce qui est optimale d'après la question 14 précédente.

Question 17. Montrez qu'il existe un DFS de T_7 où la tournée résultante est de longueur strictement comprise entre 24 et 26. Précisez le premier sommet et le parcours, par exemple en les dessinant. [Aide : Vous pourrez utiliser le fait que $x < \sqrt{x^2 + 1} < x + 1$ pour tout réel $x > 0$.]

SOLUTION. [3 pts | \sum 51.0] Je présente ici la solution du cas général. Il faut prendre comme sommet de départ un coin de V_n qui ne soit pas une feuille de T_n . Le DFS doit partir d'abord vers la branche la plus courte, celle horizontale avec $n - 1$ arêtes. La longueur de la tournée résultante (qui fait un beau croisillon) est alors $\ell(n) = 2(n - 1) + 2\sqrt{(n - 1)^2 + 1}$. Il faut connaître la formule de la distance euclidienne.

Pour $n = 7$, cela donne donc $\ell(7) = 2 \cdot 6 + 2\sqrt{6^2 + 1} \in]24, 26[$, ou encore $24 < \ell(7) < 26$.

Question 18. Quel est dans ce cas le facteur d'approximation ? (dans les conditions de la question 17, c'est-à-dire avec le DFS particulier de T_7). Donnez un encadrement.

SOLUTION. [3 pts | \sum 54.0] D'après la question 14, il suffit de diviser $\ell(n)$ par $2n = 14$ pour avoir le facteur d'approximation d'**ApproxMST**. Ce facteur est donc dans l'intervalle $]24/2 \cdot 7, 26/2 \cdot 7[=]12/7, 13/7[$, ou encore $1 +]5/7, 6/7[$.

Question 19. En généralisant les questions 17 et 18 à tout entier $n > 7$, montrez que le facteur d'approximation d'**ApproxMST** pour (V_n, d) vaut $2 - O(1/n)$.

SOLUTION. [3 pts | \sum 57.0] On a vu que la longueur de la tournée est $\ell(n) = 2(n - 1) + 2\sqrt{(n - 1)^2 + 1} \in]4n - 4, 4n - 2[$. Le facteur d'approximation est donc dans l'intervalle $](4n - 4)/2n, (4n - 2)/2n[=]2 - 2/n, 2 - 1/n[= 2 -]2/n, 1/n[$ ce qui tend vers $2 - O(1/n)$.

FIN.